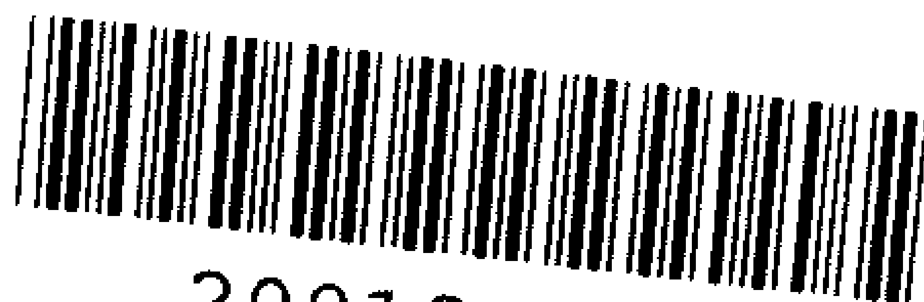
世界数学名题欣赏丛书

黎曼猜想

楼世拓　邬冬华　著

辽宁教育出版社

1987年·沈阳



黎曼猜想
楼世拓　邬冬华　著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：92,000　开本：787×1092 1/32　印张：6　插页：4
印数：3,246—5,746
1987年12月第1版　1989年11月第2次印刷

责任编辑：俞晓群　谭　坚　　责任校对：言　草
封面设计：安今生

ISBN 7-5382-0249-8/G·214　定价：2.35元

内容简介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。黎曼猜想是黎曼在1859年发表的题为《小于给定数的素数个数》一文中提出的。它是至今没有解决的一个“超级”数学难题。它与著名的素数定理有紧密的联系。在现代数学的许多领域，有类似于它的猜想，每个猜想的解决都将会引起数学界的关注。本书介绍了ζ函数的一些性质，以及从中引出的一些著名问题。并且介绍了几位大数学家在猜想研究中所作的贡献。把知识性和趣味性熔为一炉，适用于想了解猜想的读者阅读。

Summary

This is one of "A Series of Appreciation of Famous Mathematics Topics in World". Riemann Conjecture was posed by Riemann in early 50's of the 19th century in his thesis titled "The Number of Primes less than a Given Number". It is one of the unsolved "Supper" problems of mathematics. The conjecture is closely related to the well-known Prime Theorem. In many morden mathematics fields, there are similar conjectures. Every solvement of the conjectures attract closed attention in mathematics circle. This book introduces some well-known mathematician's great contributions to the conjecture. It also expounds the ardent course mathematicians walked on in bid to solv e the conjecture. In this book, interest is mixed with knowledge. Contents are plentiful and interesting. For readers of different degrees and circles, this book is really worth a good reading.

1

引　言

在19世纪和20世纪初期，科学和数学都因发现了新的基本原理和理论，从此焕然一新。如生物学中的达尔文、物理学中的麦克斯韦，心理学中的弗罗伊德，这些伟人的成就，在数学园地中，孕育出了两个非同异常的天才人物高斯和黎曼与之匹敌。这些成就在科学和数学中都引起了革命。在19世纪上半叶，数论中一个重要发展是解析方法和解析成果的导入，以表达和证明有关整数的事实。这一革新的创导者是狄利克莱和黎曼。然而，在这门学科中，迄今还有许多“傲物”没有被征服，其中之一就是数学中的一个“超级难题”——黎曼猜想。

黎曼猜想是德国科学院院士黎曼在1859年发表的一篇题为《论小于给定数的素数个数》的八页论文中提出的。自此之后，解析数论中的一大

批“世界级”难题几乎都与这篇文章有关。而这些有待解决的问题正好使解析数论这门学科充满活力。正象20世纪杰出的数学家希尔伯特所说的那样：“只要一门科学分支中充满着大量问题，它就充满了生命力，缺少问题意味着死亡或独立发展的终止，正如人类的每种事业都为了达到某种最终目的一样，数学须要问题。问题的解决锻炼研究者的力量，通过解决问题，他发现新方法及新观点并扩大他的眼界。”“谁跟前没有问题而去探索方法就很可能是无用的探索。”

从猜想提出至今，时间已走过了漫长的一个多世纪。在通向揭示猜想真伪的顶峰的坎坷道路上，许多杰出的数学家以巨大的热情去努力攀登，他们真正地懂得问题的价值。现在看来，离到达顶点还有一段漫长而又艰难的路。或许可以认为，目前对黎曼猜想乃至解析数论的研究，正处于一个期待着新突破的相对停滞阶段。一个时期的结束，促使我们追溯过去，追忆那些不堪回首的岁月，更能使我们正视现实面向未来。

现在，按年代的循迹，让我们共同就黎曼那篇关于素数个数的著名论文对解析数论乃至数学的发展所作的贡献作一点回顾和展望吧！

目　　录

引言 …… 1
一　ζ函数和ζ函数方程 …… 1
二　黎曼及黎曼猜想 …… 37
三　20世纪杰出的数学大师——希尔伯特 …… 53
四　哥廷根——20世纪初数论研究的中心 …… 91
五　杰出的数论专家——哈代 …… 101
六　菲尔茨奖获得者——赛尔贝格，朋比利，德林 …… 123
七　素数分布的一些猜想 …… 145
八　黎曼猜想的进展 …… 163

参考文献 …… 176
外国人名索引 …… 177
跋 …… 180

CONTENTS

INTRODUCTION 1

1. THE FUNCTION $\zeta(s)$ AND THE FUNCTIONAL EQUATION $\zeta(s)$ 1

2. RIEMANN AND THE RIEMANN'S HYPOTHESIS 37

3. AN OUTSTANDING MATHEMATICIAN IN THE 20TH CENTURY——DAVID HILBERT 53

4. GÖTTINGEN——THE RESERCH CENTER OF NUMBER THEORY AT FIRST 20TH CENTURY..................91

5. A FAMOUS EXPERT OF NUMBER THEORY——HAROLD HARDY 101

6. THE FIELD'S PRIZE GAINER——ATLE SELBERG, ENRICO BOMBIERI, PIERRE DELIGNE 123

7. SOME CONJECTURE OF PRIME DISTRIBUTION.................................145

8. ADVANCED OF RIEMANN'S HYPOTHESIS...163

REFERENCES 176

INDEX OF NAMES 177

EPILOGUE 180

一 ζ函数和ζ函数方程



数学历史的进程就象一部交响曲，其包含了几个主题，主旋律通过这几个主题展开，使它们交相融会，达到预期的高潮。ζ 函数理论就是数学中一个非常重要的主题。

ζ 函数首先是由欧拉于1730至1750年间提出的。对 ζ 函数的研究使函数论（特别是整函数论）、数论、模函数论、椭圆函数论等许多理论得到了进一步的发展。

1·1 ζ函数

很早以前，人们就开始研究这样一个级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (1.1)$$

这个级数后来被命名为欧拉级数。当n很大时，

这个级数可以比我们给定的任何数要大得多，也就是说，当n趋向于无穷大时，级数（1.1）是发散的。

后来，人们又进一步研究级数

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} \tag{1.2}$$

当s是实数时，欧拉在1737年就证明了，如果s比1大，那么当n趋向于无穷大时，级数（1.2）有一个有限的极限值，换句话说，级数（1.2）收敛。我们将这个极限值记为$\zeta(s)$。

我们进一步考察级数（1.2）。如果s是一个复数，级数(1.2)又将有什么性质呢？大家知道，一个复数s可以写成 $s=\sigma+it$，其中σ和t都是实数，σ称为s的实数部分，t称为s的虚数部分，分别用符号$\mathrm{Re}(s)=\sigma$及$\mathrm{Im}(s)=t$表示。利用复数的性质，我们可以看到：只要s的实数部分大于1，那么级数（1.2）一定有一个确定的复数作为它的极限值。我们也将这个极限值记为$\zeta(s)$。这样一来，函数$\zeta(s)$就是一个复变函数了。

我们把复数的实数部分看作是平面直角坐标系的横坐标，把虚数部分看作纵坐标。例如复数$a+ib$，被看成是平面上横坐标a、纵坐标为b的点

(a,b). 我们用这种方法将每一个复数与平面上的点建立起对应关系（图1.1），这样的平面称为复平面. 在复平面上的直角坐标系的横坐标 x 表示复数的实数部分，而纵坐标 y 表示复数的虚数部分. 于是我们可以看到，实数部分为 1 的那些复数组成了直线 $x=1$，而实数部分大于 1 的复数呢？当然都位于这条直线的右边. 这样就组成了“半平面”（见图1.2）. 如果把s标在这平面上，则根据前面讨论可知，当 s 位于这个半平面时，级数（1.2）是收敛的，它的极限记为$\zeta(s)$.

在复变函数论中还证明了函数$\zeta(s)$是 s 的解析函数. 所谓解析函数，它是指这个函数在它的定义的范围内可以求出任意阶的导数. 对于解析函数，我们有一个著名的解析延拓定理，这个

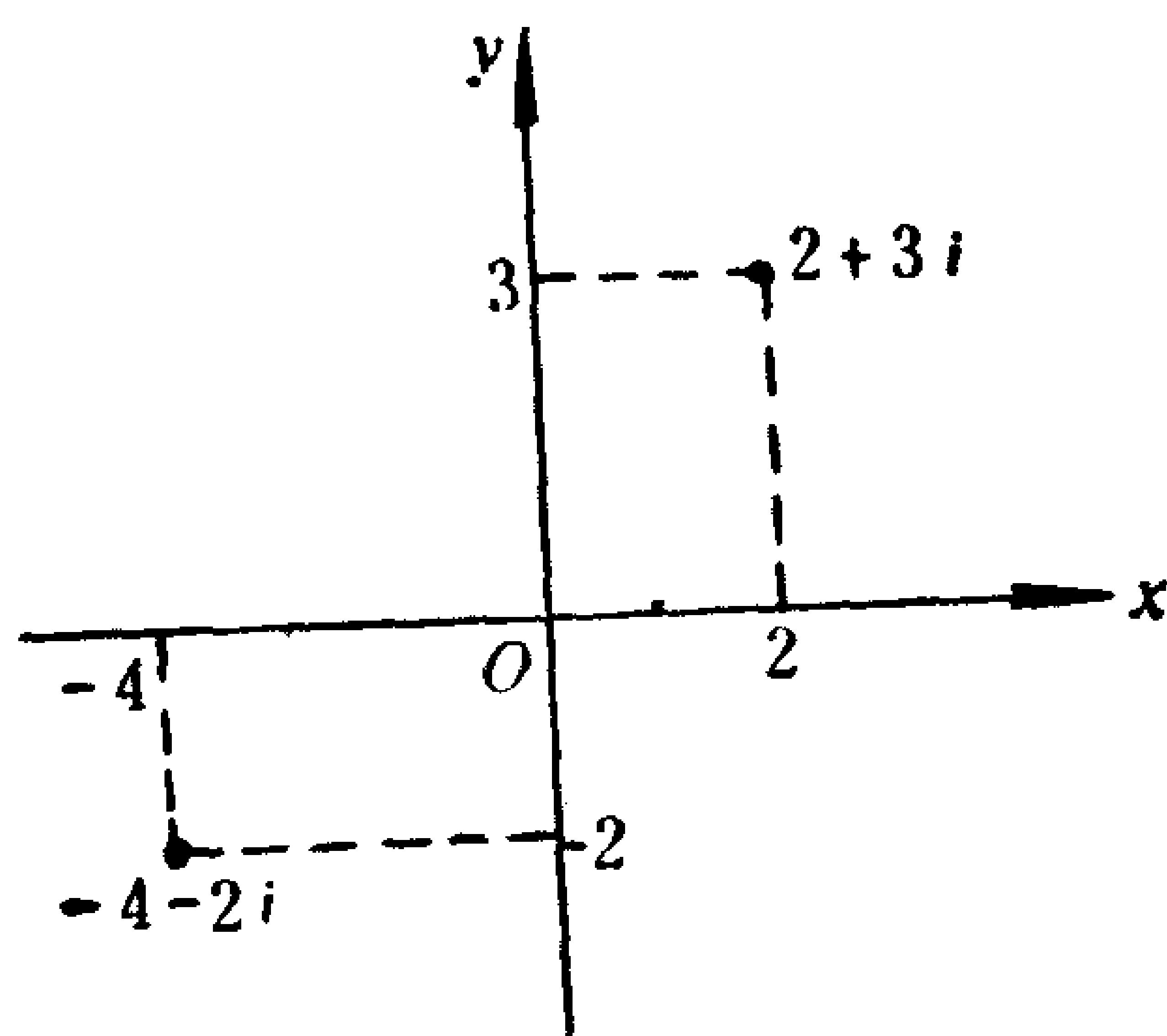


图1.1 复数平面上点的一一对应

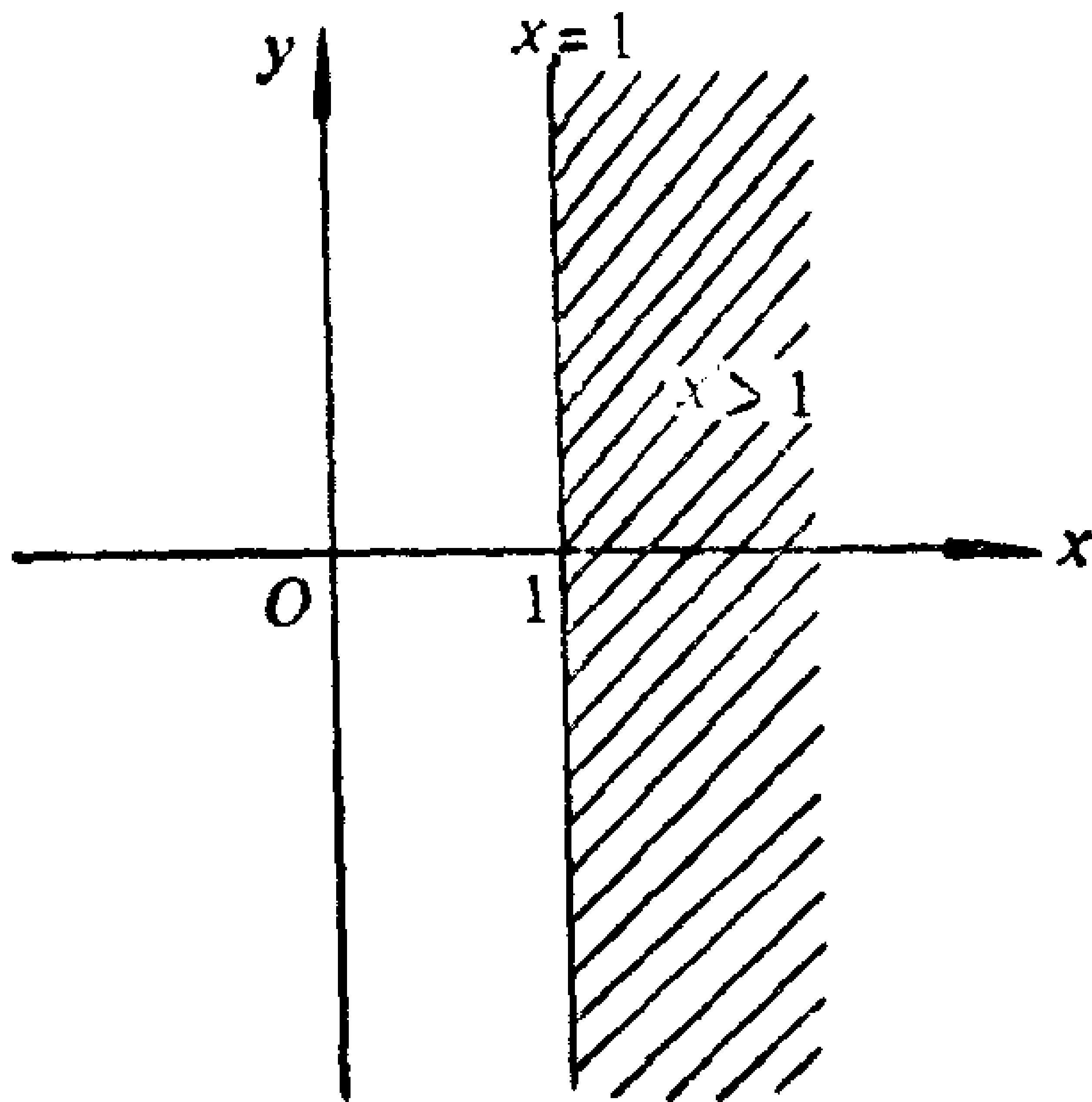


图1.2 复平面上$x=1$和$x>1$的区域

定理大致上是说：在一定条件下，一个解析函数是可以将它的定义范围进行扩张的，扩张后的函数还是一个解析函数。而且更重要的是，扩张后的函数只有一个在原来的定义范围内与原来的函数相重合。这个在较大范围内有定义的函数就称为原来那个函数的解析开拓。根据这个定理，我们就可以把较小范围内有定义的解析函数扩张到较大范围去讨论了。上面定义的函数$\zeta(s)$还只是对 s 的实数部分大于1时有意义，或者说仅仅在图1.2 中的阴影的半平面上有意义。我们用解析延拓的方法可以把它的定义范围进行扩张。严格地说来，可以扩张到除去$s=1$以外的所有复数。

经过这样解析延拓后得到的函数，我们仍记作$\zeta(s)$。这个函数就叫作黎曼ζ函数。

要指出的是，“解析延拓定理”在数学上仅仅是一个存在性定理，就是说，它只告诉我们存在一个解析函数，作为原来那个函数的解析延拓，它没有向人们指出，这个解析函数可以用什么方法来构造。因此，对于黎曼ζ函数来说，我们只知道一定有这样一个函数$\zeta(s)$，除去$s=1$这点以外都是有意义的，而且是解析的。但是，除了s的实数部分大于1时已有明确的定义外，我们写不出$\zeta(s)$的具体而明显的函数形状，这样一来，就给我们研究这个函数带来了极大的困难，因而一百多年来在黎曼ζ函数的研究中还有许多问题没有解决。

1.2 ζ函数的性质

ζ函数看起来简单明了，但是其函数性质是非常复杂的，除了黎曼猜想外，至今还有许多著名难题没有得到解决。$\zeta(n)$在$n>1$时与$n<0$时的情况是同样地糟糕。

早在1749年，欧拉首先对于所有偶数$n\geq 2$计算了$\zeta(n)$以及对于整数$n>0$，估算了交错级数1－

$2^n + 3^n - 4^n + \cdots$.

在级数 $1 - 2^n + 3^n - \cdots$的情形，欧拉利用了阿贝尔求和方法作幂级数

$$F(x) = x - 2^n x^2 + 3^n x^3 - \cdots$$

并发现这可表示为一个有理函数，然后他对$x = 1$取值。他的证明依赖于一个称之为欧拉——马克劳林求和公式，同时此公式引进了贝努利数的概念。如果您去看他的原著的话，你会发现他的应用的确有点鲁莽。后来他给出了一个令人满意的做法。

现在，我们从函数$x\mathrm{ctg}x$的部分分式展开式出发，来讨论它与ζ函数之间的关系。

定理2.1 对于$|x|<1$，我们有

$$\pi x \mathrm{ctg} \pi x = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} S_{2m} x^{2m}$$

其中 $S_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$.

证明 我们首先从$\sin x$的无穷乘积展开式入手。为了研究幂级数和ζ函数的关系，欧拉首先建立了下列有名的展开式

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

如果x不取$k\pi(k=0, \pm 1, \cdots)$ 形式的数值，那么对它取对数，我们就得到无穷级数

$$\log|\sin x| = \log|x| + \sum_{m=1}^{\infty}\log\left|1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right|$$

逐项微分后，我们得到

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}x = \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-m^2\pi^2}$$

因此

$$x\mathrm{ctg}x = 1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-m^2\pi^2}$$

我们把x换成πx，可得

$$\pi x\mathrm{ctg}\pi x = 1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2-m^2}$$

如果$|x|<1$，那末对任意 $m=1,2,3,\cdots$

$$\frac{x^2}{m^2-x^2} = \frac{\frac{x^2}{m^2}}{1-\frac{x^2}{m^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2}\right)^n$$

由于每一次都是正的，我们可以得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{m^2-x^2} = \sum_{m=1}^{\infty}S_{2m}x^{2m}，这里 S_{2m} =$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}(m=1,2,\cdots)$。这样对于$|x|<1$就有

$$\pi x\text{ctg}\pi x=1-2\sum_{m=1}^{\infty}S_{2m}x^{2m}$$

根据上述方法，我们可以从$x\text{cth}x$的部分分式展开式出发，得到

引理1 对于$|x|<1$

$$\pi x\text{cth}\pi x=1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}S_{2m}x^{2m}$$

这里$S_{2m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}$。

引理2 对于$|x|<1$

$$\pi x\text{cth}x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}$$

这里B_n为贝努利数，$B_1=\frac{1}{6}$，$B_2=\frac{1}{30}$，…。

1749年，欧拉的一个很重要工作是求出S_{2m} $(m=1,2,\cdots)$的具体数值，而$S_{2m+1}(m=1,2,\cdots)$是否能求出它的值，现在还是一个未揭开之谜。

欧拉在求出S_{2m}的值时，应用了前面讲过一个著名的展开式

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right) \qquad (2.1)$$

定理2.2 我们有等式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6},\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{90},\ \cdots$$

成立。

证明 由（2.1）式两边取对数，我们有

$$\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\sum_{m=1}^{\infty}\log\left|1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right|$$

又由于

$$\sin x= x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots$$

及 $\log(1-x)= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$

我们有

$$\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\log\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\right.$$

$$\left.+\cdots\right)^2+\cdots$$

同理

$$\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\sum_{m=1}^{\infty}\log\left|1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right|$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{m^4\pi^4}+\cdots\right)$$

从等式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{m^4\pi^4}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\right.$$

$$\left.+\cdots\right)^2+\cdots$$

的左右两边依照x的幂次展开式可知

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{2\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}$$

$$=\frac{1}{180},\cdots$$

因此

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \cdots$$

求出$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}}$ ($n=1,2,\cdots$) 的值的另一种方法，是欧拉首先给出ζ函数与贝努利数之间关系

后得出的。

定理2.3 对于$n=1,2,3,\cdots$；有

$$B_n=\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}S_{2n}$$

其中B_n为贝努利数，$S_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}}$。

证明 我们先来研究一个具有重要应用的除法。由于

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

所以

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots}$$

我们假设这个商式至少对于足够小的x值，可表成级数

$$\frac{x}{e^x-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}x^n \qquad (2.2)$$

的形式，其系数我们取成$\frac{\beta_n}{n!}$的形状，这仅仅是

为了确定系数时较为方便。

我们根据关系式

$$\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots\right)\times$$

$$\left(1+\frac{\beta_1}{1!}x+\frac{\beta_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{\beta_n}{n!}x^n+\cdots\right)=1$$

令左侧各个方幂 $x^n(n=1,2,\cdots)$的系数等于零。我们得出方程组

$$\frac{1}{n!}\beta_n+\frac{1}{(n-2)!\,2!}\beta_{n-1}+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-k+1)!\,k!}\beta_{n-k+1}+\cdots$$

$$+\frac{\beta_1}{1!\,n!}+\frac{1}{(n+1)!}=0$$

两边乘以 $(n+1)!$ 得

$$C^1{}_{n+1}\beta_n+C^2{}_{n+1}\beta_{n-1}+\cdots+C^k{}_{n+1}\beta_{n+1-k}$$

$$+\cdots+C^n{}_{n+1}\beta_1+1=0$$

利用其与牛顿二项式相似的关系，这些方程式符号的形式上可以写成：

$$(\beta+1)^{n+1}-\beta^{n+1}=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

然后把二项式展开，消去最高项β^{n+1}后，幂方 β^k 处用β_k代替，得到确定$\beta_n(n=1,2,\cdots)$ 的无穷方程组

$$2\beta_1+1=0,\ 3\beta_2+3\beta_1+1=0,\ 4\beta_3+6\beta_2+4\beta_1+1=0,\ 5\beta_4+10\beta_3+10\beta_2+5\beta_1+1=0,\cdots \tag{2.3}$$

由（2.3）式我们可得

$$\beta_1=-\frac{1}{2},\ \beta_2=\frac{1}{6},\ \beta_3=0,\ \beta_4=-\frac{1}{30},\ \beta_5=0,\ \beta_6=\frac{1}{42},\ \beta_7=0,\ \beta_8=-\frac{1}{30},\ \beta_9=0,\ \beta_{10}=\frac{5}{66},\ \beta_{11}=0,\ \beta_{12}=-\frac{691}{2730},\ \beta_{13}=0,\ \beta_{14}=\frac{7}{6},\ \cdots \tag{2.4}$$

我们根据本节引理 2 可知

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}$$

$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}x^{2m}$$

由于（2.4）式中 $\beta_n(n>1)$ 的奇数项均为零，由$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$的展开式知

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}x^m$$

对于带有偶数足标的β，我们有

$$\beta_{2n}=(-1)^{n-1}B_n$$

于是$B_1=\frac{1}{6}$，$B_2=\frac{1}{30}$，$B_3=\frac{1}{42}$，$B_4=\frac{1}{30}$，$B_5=\frac{5}{66}$，

$B_6=\frac{691}{2730}$，$B_7=\frac{7}{6}$，…。

由引理1及引理2，我们有

$$\pi x\operatorname{cth}\pi x=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}S_{2n}x^{2n}$$

$$\pi x\operatorname{cth}\pi x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}$$

从上面两等式可知

$$S_{2n}=\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_n$$

于是我们可发现每个贝努里数B_n都是正的，贝努里数当其足标增加时，其值是无止境地增大。

关于ζ函数的理论是相当艰深的，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m+1}}$ $(m=1,2,\cdots)$式除了现在还不能计算出它的值外，即使确定一下它的无理性或有理性也非常困难。

1978年，在芬兰赫尔辛基举行的世界数学家大会上，法国数学家阿皮列提出了一个非常巧妙的递推式

对于$a_0=1$，$a_1=5$，当$n\geqslant 2$时

$$n^3a_n-[34n^3-51n^2+27n-5)a_{n-1}$$
$$+(n-1)^3a_{n-2}=0 \qquad (2.5)$$

其中上式中蕴含了公式

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$$

基于（2.5）式的递推式，阿皮列证明了$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}$是个无理数．这个结果大大出乎数学大师们的意料。

然而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m+1}}$（$m\geqslant 2$）的无理性仍然还没有得到证实．这也为广大数学工作者留下了一个很好的课题。

欧拉引出ζ函数的另一个重要作用，是用ζ函数证明素数分布的性质，他首先证明了素数个数有无穷多个．这证明基于ζ函数的一个著名的欧拉恒等式．首先，我们给出算术基本定理。

定理2.4 任一大于1的整数能唯一分解成

素数的乘积。

证明 设$a>1$，要证a必写成下面的形式

$$a=p_1p_2p_3\cdots p_k,\quad p_1\leqslant p_2\leqslant p_3\leqslant\cdots\leqslant p_k \tag{2.6}$$

且这种表示式是唯一的。

我们首先证明a能表示成（2.6）的形式。若a为素数，则（2.6）显然成立。若a非素数，则必有

$$a=p_1a_1,\quad 1<a_1<a$$

这里p_1为a的最小正因数（素数）。若a_1为素数，则（2.6）已证，若a_1非素数，则有

$$a=p_1\cdot p_2\cdot a_2,\quad 1<a_2<a_1<a$$

这里p_2为a_1的最小正因数（素数）。继续进行，可以得到$a>a_1>a_2>a_3>\cdots>1$，而这种步骤不可能超过a次，最后必得

$$a=p_1p_2\cdots p_k,\quad p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_k$$

这里$p_1,p_2,\cdots,p_k$为素数。

下面证明（2.6）的表示法是唯一的。若a可以写成另一种表示法

$$a=q_1q_2\cdots q_t,\quad q_1<q_2<\cdots<q_t \tag{2.7}$$

这里$q_1,q_2,\cdots,q_t$均为素数。我们有

$$p_1p_2\cdots p_k=q_1q_2\cdots q_t \tag{2.8}$$

则一定有$p_l(1\leqslant l\leqslant k)$及$q_j(1\leqslant j\leqslant t)$使得

$$q_1 | p_l, \quad p_1 | q_j$$

但p_l和q_j均是素数，所以一定有

$$p_l = q_1, \quad q_j = p_1$$

但是$p_1 \leqslant p_l$，$q_1 \leqslant q_j$，故必有

$$q_j = p_1 \leqslant p_l = q_1, \quad 即 \quad p_1 = q_1$$

因此由（2.8）得到

$$p_2 p_3 \cdots p_k = q_2 q_3 \cdots q_t$$

同理可得 $p_2 = q_2$。依次类推，最后可得到 $k = t$，且$p_i = q_i$（$1 \leqslant i \leqslant k$）。唯一性得证。

推论 任一正整数$a > 1$，都能唯一地表示成

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}, \quad (\alpha_i \geqslant 1, \ i = 1, 2, \cdots, m)$$

这里 $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ 为素数。

下面我们证明ζ函数的欧拉恒等式。

定理2.5（欧拉恒等式） 若$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$，则当$\mathrm{Re}(s) > 1$时

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{2.9}$$

其中 $s = \sigma + it$，$\mathrm{Re}(s) = \sigma$，$\mathrm{Im}(s) = t$。

证明 显然当 $\mathrm{Re}(s) > 1$，$X > 1$时，

$$1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots$$

绝对收敛．由定理1.4 算术基本定理可知：自然数可分解为素因子的积且唯一的，我们有

$$\prod_{p<X}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p<X}\left(1+\frac{1}{p^s}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)$$

$$=\sum_{n<X}\frac{1}{n^s}+R(s;X)$$

其中

$$|R(s;X)|\leqslant\sum_{n>X}\left|\frac{1}{n^s}\right|$$

$$=\sum_{n>X}\frac{1}{n^\sigma}\leqslant\frac{1}{\sigma-1}X^{1-\sigma}$$

即当$X\to\infty$时，$R(s;X)\to 0$，由此可知欧拉公式成立。

利用上面的欧拉恒等式，我们能够证明下述性质：

定理2.6 设 p取遍所有素数($p=1,3,5,7,11,13,\cdots$)，p_k表示第k个素数．则素数个数是无穷的，并且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$$

发散。

证明 关系式(2.9)对$s=1$也成立，于是

$$P_1^{(N)}=\prod_{p_k<N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

意味着当$N\to+\infty$时，$P_1^{(N)}\to+\infty$。因此

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

发散到$+\infty$。然而，如果所有素数其个数是有限的，那末这个乘积不能不得出有限值。我们还可看到

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdots$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0$$

但是

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{1}{p_k}\right)}{-\frac{1}{p_k}}=1$$

所以

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\cdots$$

是发散的。

下面我们再给出级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$$

发散的另一个证明。

证明 假定级数收敛，则存在整数n使

$$\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p_m}<\frac{1}{2}$$

令$Q=p_1p_2\cdots p_n$，并考虑 $1+lQ(l=1,2,\cdots)$。这些数中没有一个能被素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的任何一个整除。因此，数$1+lQ$ 的所有素因式都出现在p_{n+1},p_{n+2}，…中间。从而对每个$r\geqslant 1$均有

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{1+lQ}\leqslant\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p_m}\right)^t$$

因为在右边的各项中间，它的和包括了左边所有的项。但这不等式右边不超过收敛的几何级数

$\sum\limits_{t=1}^{\infty}2^{-t}$。因此，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{1+lQ}$ 的部分和有界，

从而此级数收敛。但实际上$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{1+lQ}$发散，得出与假设矛盾，故命题成立。

关于ζ函数有许多有趣的性质。尽管数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，但数列$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$却是收敛的，而且收敛于一个称之为欧拉常数的数$\gamma$。

定理2.7 证明数列 $L_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$收敛，且 $\gamma=\lim L_n$。此处γ为欧拉常数。

证明 设$d_n=L_n-\frac{1}{n}$。此时有 $L_{n+1}-L_n=\frac{1}{n+1}-\log\frac{n+1}{n}$，$d_{n+1}-d_n=\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$。由于对$n<x<n+1$有$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n}$，所以

$$\int_n^{n+1}\frac{dx}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}<\int_n^{n+1}\frac{dx}{n}$$

得出

$$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

这个不等式说明L_n单调递减，而数列 d_n 单调递增。又$d_n<L_n$；于是$d_1=0$是 L_n 的一个下界。换言之，序列 L_n 收敛于极限γ，$\gamma=0.5772156649\cdots$。

γ 是否是无理数或超越数，这个问题也是至今没有解决的著名世界难题。

由上述可知，级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散。而且容易看出：数列$L_n+\log n$非常缓慢地递增；例如：$L_{1000000}+\log_{1000000}=14.39,\cdots$。

ζ 函数与四方定理有关。一个历史悠久的丢番图问题是把一个整数写成几个平方的和。完全的平方数是1，4，9，16，25，36，…，这是每个小学生都知道的。其它的数如2，3，5，6等等，都不是平方数，但它们都能表示成平方数的和，例如2＝1＋1，3＝1＋1＋1，5＝4＋1，6＝4＋1＋1。这些都是非常容易的，但是，任何一个数表示成平方和，该需要多少项？需要四项还是五项？随便选一个数如

15，149，200，213，266，371，

是否需要把许多平方数加起来才能得到 这 个 数呢？答案是四个数就足够了，因为 $15=9+4+1+1$ 超过三个平方数的和，所以三个平方数有时是不够的。这个答案首先是由古希腊人发现的。象古希腊人发现的许多事实一样，他们并没有给证明。欧拉也曾预言："每个正整数，都是四个或四个以下平方数的和。"是正确的。人们发现这定理叙述容易证明难。

经过近二十个世纪后，雅可比用 ζ 函数证明了关于四个平方和的定理，这与古希腊人发现的完全一样。

1.3 ζ函数的应用

数学需要不断发展，人们的思维也并没有止于 ζ 函数的研究。欧拉首先考虑了若干形如 $\Sigma a(n)n^{-s}$的级数，这里$a(n)$由依赖于n与模N的同余类。但这一课题似乎没有得到进一步的探讨，直至19世纪30年代获利克莱才重新考虑了这类问题，并且发现这种级数是解决数论问题的强有力工具。这一成就使得这类级数从此冠以"获利克莱级数"的名称。

获利克莱同时引进了有理域上的 L—级数，

例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X(n)}{n^s}$$

这儿X是特征标（对于某个a及一切n成立$X(n+a)=X(n)$）和形如下式的级数

$$\sum_{m,n}\frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^s}$$

此处a,b,c是整数，这些归类于二次域上的 L—级数和ζ函数。

自此以后，又一个重大步骤就是对任意代数数域引进ζ函数，这是戴德金做的，戴德金已充分认识到这些函数对代数数域理论的价值。作为他的理想理论的直接推论，他发现这些函数的欧拉乘积以及它们与理想类个数的关系。在他看来为了计算类数，知道级数在$\mathrm{Re}(s)>1$时收敛，以及s趋于1时$\zeta(s)$的性质已足矣。

现在我们跨一大步，跃入本世纪。本世纪初，希尔伯特开始认识到：基于伽罗华群的概念，互反律与代数数域阿贝尔扩张有关。克罗内克对此有杰出的贡献。希尔伯特对阿贝尔扩张作了许多猜测并证明了其中的一部分，冯特万格勒和高木证明了另外一些。但是，在阿丁猜测并证明他的互反律之前，这座大厦还缺一个屋顶。这类互

反律的实质在于：设k是数域K的n次阿贝尔扩张；$Z(s)$是K上的戴德金ζ函数；则$Z(s)$可分解成n个因子，每个都是k的L—级数．这里的L——函数是1897年韦伯把狄利克莱引进的L—级数的直接推广，赫克关于ζ函数的函数方程式的证明对这些函数同样适用．

把ζ函数与互反律如此融洽地结合在一起，实属大师们的杰作．同时，只有能工巧匠才能把它们分离开来，这工作是由阿丁做的，戴德金与韦伯以戴德金的代数数域作为样板时讨论了模p素域上的单变量代数函数．阿丁在他的学位论文中指出了如何把戴德金的代数数域的ζ函数的定义推广到这种函数域，他觉得这种新的ζ函数与戴德金原来的函数几乎是一样的神秘；虽然他可以证明它们是p^{-s}的有理函数；但他看不出有什么理由指望它们的黎曼猜想的证明与经典的要容易．直至40年代，魏依借助于数论和代数几何学解决了这个问题．并提出把它推广到一般代数簇上的猜想，此猜想也已于1973和1974年由比利时数学家德林解决．

然而，ζ函数理论及其应用不是静止不前的．

1.4 黎曼ζ函数的函数方程

黎曼ζ函数还有一个很重要的问题，就是ζ函数的零点分布问题，其中ζ函数的显然零点与ζ函数的函数方程有紧密的关系。而ζ函数的函数方程与特殊函数Γ密切相关，下面我们先介绍一下Γ函数。

我们用γ表示下面的极限

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)$$

$$=0.5772157\cdots$$

常数γ称之为欧拉常数。

定义 Γ函数是由下面的等式给定的

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

从定义可以看出s平面上点 $s=0,-1,-2,\cdots$，是Γ(s)的奇点。

定理4.1 （欧拉公式）等式

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

成立。

证明 由Γ的定义及γ的定义，可知

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=s\cdot\lim_{m\to\infty}e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)}$$

$$\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

$$=s\cdot\lim_{m\to\infty}e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)}$$

$$\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

$$=s\cdot\lim_{m\to\infty}\left(e^{-s\log m}\prod_{n=1}^{m}e^{\frac{s}{n}}\right)$$

$$\cdot\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\prod_{n=1}^{m}e^{-\frac{s}{n}}\right]$$

$$=s\cdot\lim_{m\to\infty}\left[e^{-s\log m}\prod_{n=1}^{m}e^{\frac{s}{n}}\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\prod_{n=1}^{m}e^{-\frac{s}{n}}\right]$$

$$=s\cdot\lim_{m\to\infty}m^{-s}\cdot\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

$$=s\cdot\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)\right]$$

$$\left(\text{其中 } m^{-s}=\left[\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-s}\right)$$

$$=s\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{s}$$

$$=s\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

即：$\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$.

推论1　$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n^{s}}{s\cdot(s+1)\cdots(s+n-1)}$

推论2　$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$。

通过上述$\Gamma(s)$的定理，我们可以得到一个关于Γ函数的函数方程。

定理4.2　等式

$$\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$$

成立.

证明　由定理4.1，我们可知

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)}=\frac{s}{s+1}$$

$$\lim_{m\to\infty}\cdot\prod_{n=1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s+1}\left(1+\frac{s+1}{n}\right)^{-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}}$$

$$=\frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+s}{n+s+1}$$

$$=\frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)(s+1)}{m+1+s}=s$$

定理证毕。

推论 $\Gamma(n+1)=n!$，n 为正整数，$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$。

Γ 函数的另一种形式与积分有关，下面我们给出这种形式

定理4.3 当$\mathrm{Re}(s)>0$时

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt$$

证明 由本节定理4.1的推论1，可知

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n^s}{s\cdot(s+1)\cdots(s+n-1)}$$

我们考虑函数

$$\Pi(s;n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt$$

$$=n^s\int_0^1(1-t)^n t^{s-1}dt$$

$$=\frac{n^s}{s}\int_0^1(1-t)^n dt^s$$

$$=n^s\cdot\frac{n}{s}\int_0^1(1-t)^{n-1}t^s dt$$

$$= \cdots = n^s \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{s \cdot (s+1) \cdots (s+n-1)} \cdot$$

$$\int_0^1 t^{s+n-1} dt$$

$$= n^s \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{s \cdot (s+1) \cdots (s+n)}$$

因此

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \Pi(s; n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt$$

设

$$\Gamma_1(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

则

$$\Gamma_1(s) - \Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_0^n t^{s-1} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \right\}$$

后一积分当$n \to +\infty$时趋于零. 其次，当$0 \leqslant t < n$时，有

a) $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$, 因为

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right)}$$

$$= e^{-n\left(\frac{t}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2+\cdots\right)}$$

b) $$0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left\{1 - e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\} \leqslant e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\},$$

因为

$$e^t \geqslant \left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{t}{n}\right)}$$

$$= e^{n\left(\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2+\cdots\right)}$$

此外，当$0<y<1$时，

$$(1-y)^n \geqslant 1-ny$$

即

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right\} = e^{-t}\frac{t^2}{n}$$

由此可知，当 $n \to +\infty$时，第一个积分趋于零，亦即：$\Gamma_1(s) = \Gamma(s)$。

Γ 函数是一个特殊函数，它具有许多奇妙的性质，在此我们也不一一赘述了。下面我们给出ζ函数的函数方程。

定理4.4 等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cdot\zeta(1-s)$$

成立.

推论 函数

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

是整函数，且

$$\xi(s)=\zeta(s)$$

关于这个定理的证明，我们不再给出，有兴趣的读者可参阅梯其玛希《函数论》一书 p_{165}.

从定理4.4我们可以看出，因为当 $s=-2$, -4, $-6,\cdots,-2n,\cdots$时，$\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=0$,所以 ζ函数等于零；当$s=0$时，因为$\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$的零点与 $\zeta(1-s)$的奇点相互抵消,所以ζ函数不等于零. 上述这些零点我们通常称它们为 ζ函数的显然零点. 除了显然零点外， ζ函数在带形域$0\leqslant\mathrm{Re}(s)\leqslant 1$ 上有无穷多个非显然零点.

下面我们给出关于 ζ函数零点的一个非常有趣的事实.

定理4.5 函数ξ函数具有无穷多个零点ρ_n，$0\leqslant \mathrm{Re}(\rho_n)\leqslant 1$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\rho_n|^{-1}$ 发散，而对于任意的$\varepsilon>0$，级数$\sum|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$收敛。$\xi(s)$ 函数的零点就是$\zeta(s)$的非显然零点。

推论 ζ函数的非显然零点关于直线$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$和$\mathrm{Im}(s)=0$是对称分布的。

关于ζ函数的零点，黎曼猜测：$\zeta(s)$ 函数的所有非显然零点都位于 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$的直线上。根据后来西格尔从黎曼未发表的手稿中分析出，黎曼当时已经知道$\zeta(s)$在 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$的直线上有无穷多个零点。时间过去了近五十五年后，哈代才得到这一结果。

1749年，欧拉首先给出了 ζ函数的函数方程的部分证明，直至1859年，黎曼才给出 ζ函数的函数方程的证明。他采用了两种方法证明了 ζ函数所满足的函数方程。他的第二个证明所采用的方法是非常重要的。他通过一项被称作“米林变换”的技巧把 ζ函数与函数

$$f(q)=1+q^4+q^9+\cdots$$

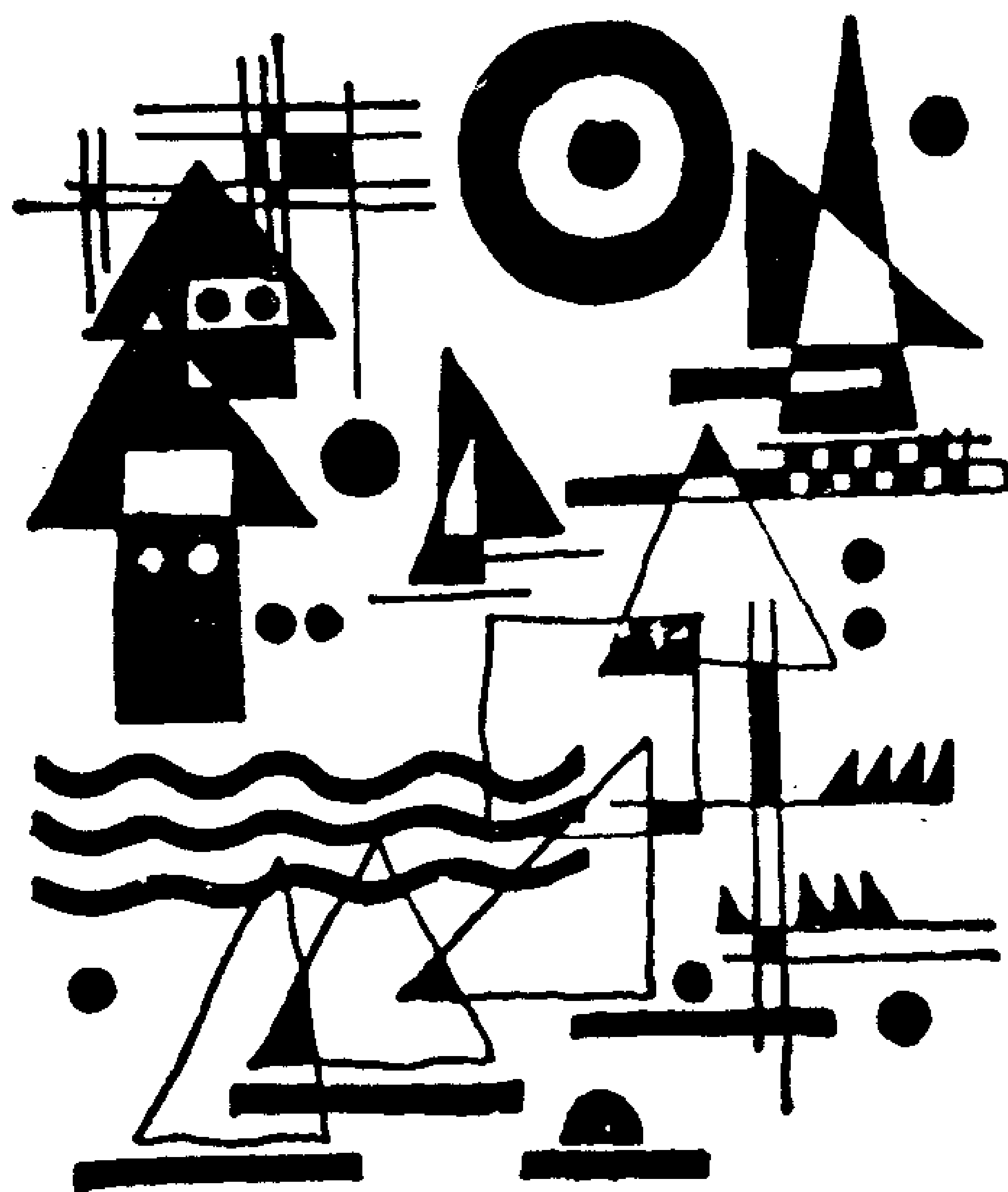
联系起来证明。欧拉也曾考虑过函数$f(q)$，但只是

将它看成一个形式幂级数．黎曼注意到它，并且认为它本质上是一个雅可比的 ζ函数．这样，一个新的主题进入了我们的数学，这个主题的地位也因赫克关于模形式的工作而大大地突出起来．它与当今研究的模函数理论密切相关．

ζ 函数方程的另一个极其重要的应用，在于椭圆函数论．正象$\zeta(s)$的函数方程把ζ在s与$1-s$的值联系起来一样，ζ函数的函数方程式把 $q=e^{2\pi i\tau}$与$q=e^{-2\pi i/\tau}$的值联系起来，而且黎曼首先发现前者是后者的直接推论．这一方程在雅可比关于椭圆函数论的著作中首次出现，并且刻画了椭圆函数论中许多本质性的概念，在后来论述椭圆函数的理论中，处于愈来愈显要的地位．

ζ 函数的主题一次又一次地在许多数学分支中出现，不断地推动了数学许多分支的发展，也因此涌现出了许多杰出的数学家．下面几章我们将给大家介绍几位在黎曼猜想研究中作出过重要贡献的数学家．

二 黎曼及黎曼猜想



黎曼是一位杰出的现代数学家，现代数学的开山鼻祖。他对现代数学的许多分支的发展产生了深远的影响，为后人留下了许多宝贵的遗产——供数学进一步发展的概念，并为科学的发展提供相应的数学基础。仅举一例，爱因斯坦的广义相对论就是以黎曼所发展的数学为基础的。

2.1 黎曼和他的猜想

黎曼，1826年生于德国汉诺威的一个小村庄，1866年因患结核病卒于意大利北部的一个疗养圣地。整个数学界从此失去了一位最富有创造性、远见卓识的天才人物。俗话说："名人该多受磨难"。黎曼的大半生就是这样度过的。他出身于一个路德派牧师家庭。从外表看，黎曼总是斯

斯文文的，身体总是虚弱的，但他仍以顽强的毅力坚持学习。尽管他父亲收入有限，他还是设法取得良好的学习条件。黎曼先在柏林大学学习，后进哥廷根神学院，不久转学数学，师从名师高斯和韦伯。1851年，在高斯的指导下，以其才华横溢的论文，在哥廷根大学获得博士学位。被公认为天才。但他偏偏没有职业！在此期间，更为糟糕的是，他家人口众多，全靠他一个人来养活。黎曼收入低微，不敷日用，以致挨饿。值得称道的是，他仍然以虔诚的热忱从事数学研究，他的研究足迹几乎踏勘了现代数学的每一个领域。

1854年，黎曼几经周折成为哥廷根大学的一个私教员，即允许作一些讲演并收学生的酬金。为获得这个职位，他发表了关于建立在几何基础假设上的著名讲演。这被公认为数学史上发表的内容最丰富的长篇论文。该论文所讨论的是：空间和几何的广泛扩展。后来爱因斯坦和其他人发现，黎曼的研究成果正好是广义相对论所需要的数学背景。尽管许多抽象理论付之于实际，往往是预先料想不到的。然而数学能超前刻画物理世界，是何等的美妙！

1859年黎曼终于时来运转，他继承了狄利克

莱的席位（此席位一度由高斯担任），荣任哥廷根大学的教授，当选为德国科学院院士。为了说明他自己的才能，在德国科学院院刊上发表了题为《论小于给定数的素数个数》的一篇著名论文。提出了空前重要的猜想——黎曼猜想。

所谓的黎曼 ζ函数，是指

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

其中$s=\sigma+it$。当 s 为整数时，欧拉曾指出上述函数和素数分布之间的关系。黎曼本人仔细地研究了$\zeta(s)$函数。对于$\zeta(s)$ 的零点分布，他证明了当$\sigma>1$时，$\zeta(s)=0$无解；当$\sigma<0$时，只有 $s=-2$，$s=-4$，…，-6，…这么一些显然零点。于是在复数平面上，$\zeta(s)$的所有其他零点只可能在$0\leqslant\sigma<1$，这个无限伸长的带形区域中（如图2.1）。

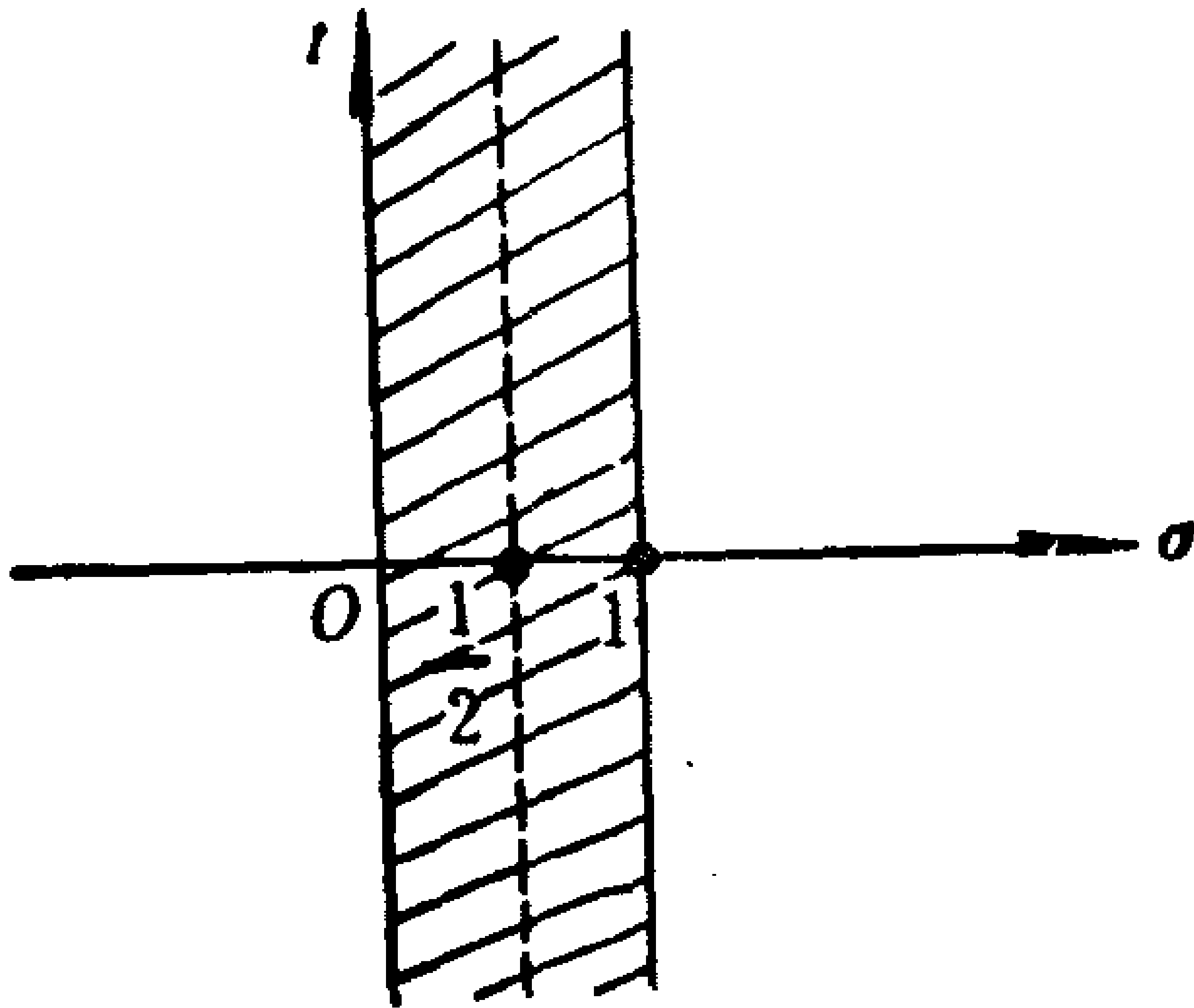


图2.1

其实，黎曼在《论小于给定数的素数个数》一文中，共提出了六个猜想．最著名、至今未获证实的就是现称的“黎曼猜想”．即方程

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots=0$$

的解都位于复数平面$\sigma=1/2$这条直线上（见上图2.1）．

乍看起来，这个猜想极为简单，它仅包括求一方程$\zeta(s)=0$ 的解．虽然对一个非专业工作者来说似乎是复杂了些，但其中的许多内容都是一个高中毕业生所熟知的．猜想的提出至今已有百余年，但猜想仍悬而未决．一位法国大数学家曾想刻画“上等数学”与“次等数学”的界限，他说：“有些问题是人为提出的，有些问题是它本身提出的．”我们所谈的黎曼猜想，显然是由“本身提出的”．问题提法的极端简单，结合证明的极端困难，使之成为真正的问题．况且黎曼猜想的解决又导致解析数论乃至数学的重要发展．

1859年，狄利克莱过早地离开了人世．黎曼接替了他的职位．三年后结了婚，并生有一女孩，生活是美满的．按理说，此时黎曼正处于不断再创造的黄金时期．但好景不长，长期艰苦的磨难使黎曼的身体过早地衰退．这颗数学太空中的

巨星于1866年陨落了，时年仅 40 岁 ．“春蚕到死丝不断，留赠他人御风寒”．他的一生确实象蚕，吃的是叶，吐的是丝，直至生命的终结。

2.2 “数学王子”高斯和狄利克莱

“名师出高徒。”在人们颂扬黎曼对数学作出的伟大贡献的时候，谁都不会忘记他 的 导 师“数学王子”高斯，及与他一起创导解析数论的狄利克莱。

高斯是一位令人敬畏的数学 天 才，历 史 上的罗兹岛上的阿波罗神像横跨18世纪 和 19 世 纪之间。他不但被公认为是19世纪最 伟 大 的 数 学家，通晓自 己所处时代的最后一位人物，而且与阿基米德和牛顿并称为历史上最伟大的三位数学家。

高斯，1777年出生于德国不伦瑞克。他的父亲是一位对正规教育怀有偏见的劳动者。他的母亲，虽然自己没有受过教育，但她是一位热情鼓励孩子学习，并以孩子的成就引以为自豪的慈母。

历史上间或出现神童，高斯就是其 中 的 一个。关于他，有一个令人难以置信的故事，说他年仅三岁时发现了他父亲的一个算术上的错误。

另一个是常讲的故事，1785年的一天，他的老师为了让全班同学有事可做，要他们把1到100的数统统加起来.老师知道有一公式可以解这道题目，不过二年级的学生当然不会知道，老师有把握偷闲一小时.真没想到：高斯立刻就走到老师面前，送上正确的答案：5050．高斯也知道这个公式!

幸而教师有眼力，看出此事非同寻常，这是数学史上的幸事．高斯的父母亲没受过教育，不可能教给他这个公式，那肯定是他自己发现的．于是一位冠古绝今的大数学家应运而生了，从此开始了他的事业。

1797年，年仅20岁的高斯写下了《算术研究》一书，开创了数论研究的新纪元．关于数论，他曾留下这样一句名言：“数论是数学的女皇”．有些人却不喜欢它，说它是“无用的科学”.关于这一点,可以注意高斯的另一句名言：“数学是科学的女皇”．因为其他科学建筑在数学基础上的，而数的概念显然是数学的核心。

这里我们无暇顾及高斯的成就，也不试图分析高斯的复杂而又矛盾的个性．他是一个怪人，有时超脱于世外，有时淡漠无情．但他又是一个聪明绝顶，才智过人的智者．他曾被形容为：“能从九霄云外的高度按照某种观点掌握星空和

深奥数学的天才。”高斯对自己的科学著作总是要求尽善尽美。他坚持这么一个信念：“宁可少些，但要好些”。他选择了《李尔王》中的下面几行诗作为他的格言：

你，自然，我的女神，

我要为你的规律而献身。

高斯深信：数学要有灵感，必须接触现实世界。真如一位哲学家所说的：“智慧离我们较近，当我们不是高飞而是俯首于大地的时候。”高斯的思维方式和对问题的精辟见解潜移默化了他的学生狄利克莱和黎曼。

1855年，高斯去世后，狄利克莱成为高斯的继承人。对于这样一位有才能的数学家，确实是一个恰当的荣誉。以前他是高斯的学生，又毕生崇敬他的老师。有一个讲述狄利克莱和他伟大的老师高斯的动人故事。在1849年7月16日，高斯获得博士学位五十周年。高斯高兴地参加了哥廷根为他隆重举行的庆祝会。当会议进行到某议程时，高斯不知不觉地将他的不朽名著《算术研究》的一张原稿点燃。一同参加庆祝会的狄利克莱象见到犯圣赎一般地吃了一惊。他冒失地从高斯手里挽救了这一页，并一生把它视为珍宝珍藏起来。他的编辑者在他死后找到了这张原稿。

狄利克莱在德国和法国都有影响．他在两个国家的数学和数学家之间所架起的桥梁是值得称赞的．他除了对数学本身作出巨大的贡献外，他在使一些高斯的深奥的方法易于理解上也作出了有价值的贡献；他那精采的《数论讲义》至今仍然是对高斯数论研究最通俗易懂的介绍之一．1859年狄利克莱离开了人世，但他的不朽名字在高等数学中永存．

2.3 素数定理

基于黎曼那篇题为《论小于给定数的素数个数》的著名论文，后人所取得的一个明显的胜利成果，就是现今的“素数定理”．这个问题的历史值得回忆．主题是从0到已知数 x 之间的素数平均密度．假设 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数个数，则小于100的素数有25个，即 $\pi(100)=25$．同样我们可以数出小于1000或小于 1,000,000的素数个

	素数<100	素数<1,000	素数<1,000,000
素数个数	25	168	78,498
素数百分比	25%	16.8%	7.8%

数。这样数下去就得到小于一百、一千或一百万的素数个数（见上表）。

大约在1800年，勒让德首先观察了如上的这个表，得出了一个重要的猜想，对于足够大的数 x，$\pi(x)$ 逼近于下式：

$$\frac{x}{\log x - 1.08366}$$

此处 $\log x$ 表示 x 的自然对数。此后高斯又独立地建议了一个类似而并不与它相等的公式。他们看出各区间的素数似乎和函数 $\log x$ 有关，当时认为这个关系简直难以理解。

自然对数函数 $\log x$ 出自于微积分中有关生长和衰亡的问题。例如，设想一笔借款，利率150%，一点一点地利上加利逐渐增长，于是 $\log x$ 代表一元钱变成 x 元所需的年数。数学家把复利中钱数增长的过程叫做“指数增长率”。把过程叙述稍加改变就可以用各种不同的问题，如人口增长，放射性衰变，物体冷却以及其他高利率问题。

综合勒让德和高斯猜测，$\pi(x)$ 可用 $\frac{x}{\log x}$ 来逼近。用百分比来表示这个逼近，x 愈大逼近得愈好（见下页表），可以看出，即令 x 大到十

亿，百分误差仍然很大。然而，高斯不仅是一位数论专家，他还建立了数理统计，并应用于天文和素数计数这样两个不同的问题。高斯用现今统计学家所谓的“最小二乘法”分析了素数公式中误差的性质，他的结果表明，x 足够大时误差极小。

x	素数个数 $<x$	$x/\log x$	百分误差
一千	168	144.8	16.0%
一百万	78,498	72,382	8.4%
十亿	50,847,478	48,254,942	5.4%

支持素数定理成立的数据

这个“素数定理”（1800年时还是猜想）作为最著名的猜想而震惊数学界。这个方程的一端是素数个数，另一端来自微积分的函数$\log x$，并且和人口增长有关。这是离散与连续结成的“不解之缘”！

对于勒让德-高斯猜想的证明，五十年间毫无进展。首先在这个方向作出重要贡献的是切比晓夫。他在1848年和1850年相继得到了一些结果。尽管许多数学家争相仿效，得到了一些结

果．但最终发现他的方法不会导致问题的彻底解决，遂被抛弃了．英国数学家西尔凡斯特也曾致力于“素数定理”的研究，他在说明切比晓夫贡献的意义以及他对这个问题的展望时说：“但是要确立这种可能性的存在，我们或许要等待在世界上产生这样一个人，他的智慧与洞察力象切比晓夫一样，证明自己是超人一等的．”

当西尔凡斯特写下这些东西的时候，后来解决“素数定理”的阿达马出生了．但是我们不应该仅仅归功于个别人的才华．前人的劳动，特别是黎曼关于《论小于给定数的素数个数》一文的工作，为他证明“素数定理”铺平了道路．

历史告诉我们，数学的发展不仅仅依靠于已经证明了的理论，还依赖于那些未知的猜想．人们通过研究这些猜想，在研究过程中丰富了自己的知识，充实了数学思想的宝库．1859年，黎曼那篇题为《论小于给定数的素数个数》的著名论文，尽管论文极为简略，证明脱漏很大，已经确证的很少．但自此以后，几乎所有素数问题与之有关，开辟了素数分布理论研究的一条新途径．三十年间其他数学家力图证明黎曼论文中所表达的主要结果，但都徒劳无功．终于在黎曼的论文发表三十五年后，阿达玛首先获得了重要突破，

证明了其中的三个猜测．不久，阿达玛和普辛几乎同时于1896年各自独立证明了“素数定理”．他们的证明巧运了黎曼的“新思”．以后，另一位数学家蒙镐特证明了黎曼论文中的另外两个猜测，最后遗下的一个就是迄今仍未解决的黎曼猜想．

经验告诉我们，正是那些隐藏得非常艰深的问题，才会常常需要对邻近的事实和原理有更深入的理解，才会引导充满才智的人们去为丰富人类的知识而奋斗．正是这样，数论才成为数学其他分学科中许多工具的一块试金石．由此数学可以检验其方法的价值，衡量他们的能力．

附　录

黎曼在题为《论小于给定数的素数个数》一文中，关于$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s=\sigma+it)$提出了六个猜想：

1）$\zeta(s)$在带状区域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 中有无穷多个零点；

2）若$N(T)$表示$\zeta(s)$在矩形$0\leqslant\sigma\leqslant1$，$0<t<T$中的零点个数，则

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T++O(\log T)$$

3）若以$\rho=\beta+i\gamma$来一般标记 $\zeta(s)$ 的非无聊零点，则$\Sigma|\rho|^{-2}$收敛，而$\Sigma|\rho|^{-1}$发散；

4）整函数

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{1}{2}s}(s-1)\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$$

可以表示为

$$ae^{bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{e}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

此处$\prod_{\rho}$为绝对收敛的无穷乘积，其中ρ经过$\zeta(s)$的全体非无聊零点；

5）$\zeta(s)$ 的全体非无聊零点都位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$上；

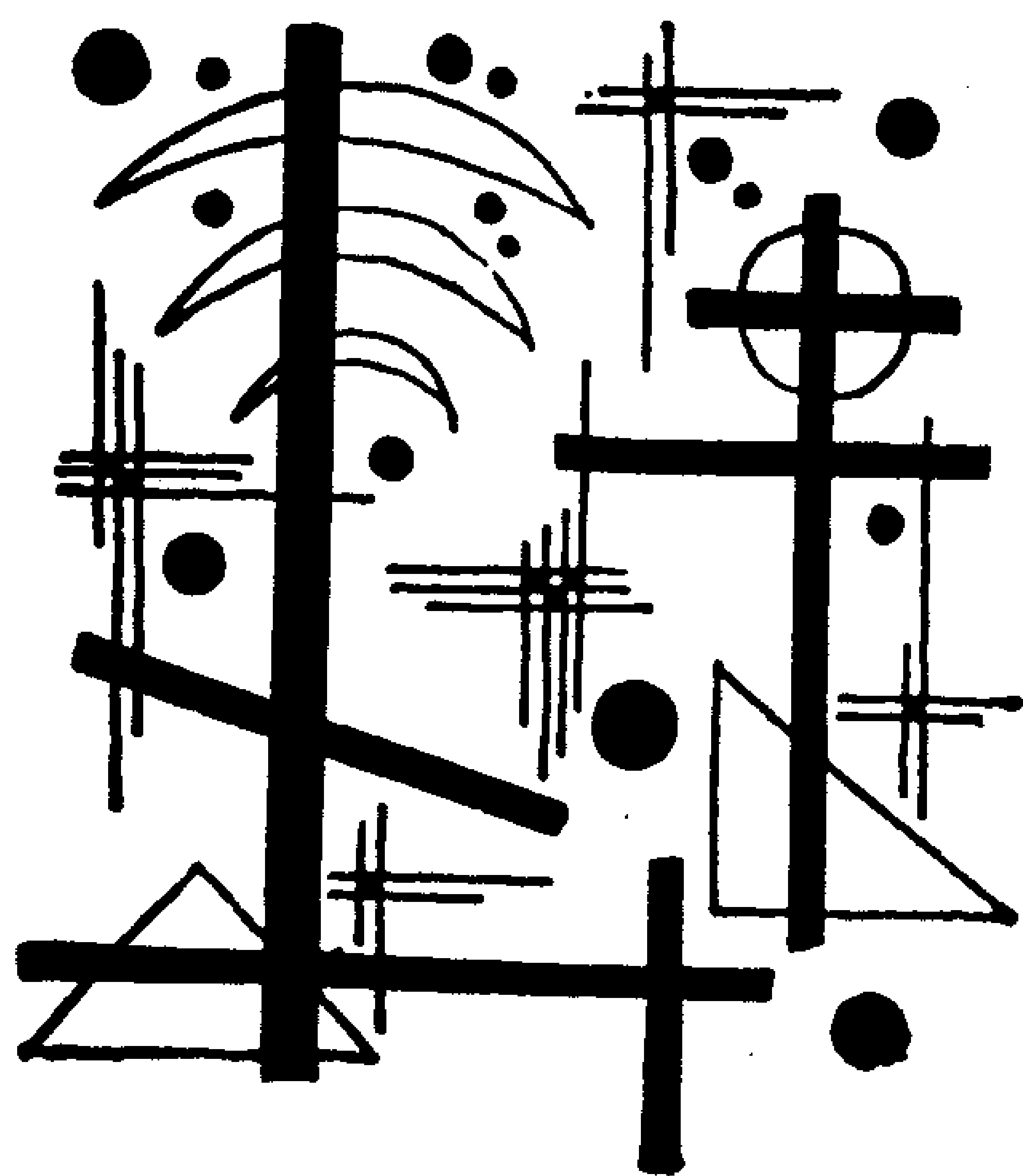
6）命$\Pi(x)=\sum_{2<n<x}\frac{\Lambda(n)}{\log n}$及$\Pi_0(x)=\frac{1}{2}\cdot(\Pi(x+0)+\Pi(x-0))$。则有公式

$$\Pi_0(x)=\mathrm{li}x-\sum_{\rho}\mathrm{li}x^{\rho}+\int_x^{\infty}\frac{du}{(u^2-1)u\log u}-\log 2\quad(x>1)$$

此处$\mathrm{li}x^{e}=\mathrm{li}e^{e\log x}$及

$$\mathrm{li}e^{w}=\int_{-\infty+vi}^{u+vi}\frac{e^z dz}{z},\quad w=u+iv,v\leqslant 0$$

三 20世纪杰出的数学大师—希尔伯特



"我们必须知道，

我们必将知道。"

这是20世纪伟大的数学大师大卫·希尔伯特毕生的乐观信念。希尔伯特的数学工作博大精深，然而他的影响并不完全于此。他以他的信念激励了许许多多同时代人。他以一位吹笛人的姿态吹奏出迷人的芫笛声，引诱无数的慕拜者投入数学的怀抱；他，又以一位吹号者的雄姿吹响了浩亮催人的进军号声，发起了攻克数学堡垒的战斗。回顾他留下的数学上的印迹而现在正在消失于地平线上的数学时代，使人们似乎觉得这个时代比起前后两个时期更臻完美、更趋平衡。人们今天所走的数学道路，在许多情况下可追溯到他的推动。光阴驰去，已成为过去。而希尔伯特精神永存，她将引导数学继往开来，不断取得成

功。

3.1 数学的未来

1900年，新世纪迷人地展现在人们的眼前，人们都憧憬于未来，科学正期待着重大突破，世界各国的政府体制正处于变革之中……。这一年的8月6日，第二届国际数学家大会在巴黎隆重召开。博学多才的德国大数学家大卫·希尔伯特在会上作了一个著名演说，向国际数学界提出了二十三个尚未解决的问题，宣告数学进入20世纪。这些问题对20世纪数学的发展方向产生了特殊的影响。凡是解决其中某些问题的人，立刻就赢得热烈赞扬，得到至高无上的荣誉。这一演说揭示了数学的未来，成为世界数学史上的一块重要里程碑，为20世纪数学发展揭开了光辉的第一页。

科学发展的每一时期都有自己的问题。希尔伯特站在当时数学研究的最前沿，高瞻远瞩地用二十三个数学问题，预示20世纪数学发展的进程。其中第八个问题涉及两个课题：（1）黎曼猜想；（2）哥德巴赫猜想。而这两个猜想恰恰是20世纪初至今解析数论的核心问题。希尔伯

特在提出问题时曾指出：对黎曼猜想进行彻底讨论之后，我们或许就能够去严格地解决哥德巴赫猜想。现在20世纪已接近尾声，黎曼猜想和哥德巴赫猜想仍然都是至今没有解决的难题。

希尔伯特为1900年的重要演说曾作过详细的准备。1899年，希尔伯特收到一份邀请，希望他在1900年夏天巴黎举行的第二次国际数学家大会上作一个主要发言。新世纪犹如一张白纸，等待着人们去描绘出宏伟的蓝图。希尔伯特计划在这世纪交替之际作一个与这个重要时机相称的发言。当时他有两个想法：或者作一个替纯数学辩护的演讲，或者讨论一下新世纪数学的发展方向，指出一些数学家应集中力量加以解决的重要问题。在给他的好友、杰出的数学家闵可夫斯基的贺年信中，提到了上述两种想法。1900年1月5日，闵可夫斯基回信说："最有吸引力的题材，莫过于展望数学的未来，列出新的世纪里数学家应当努力解决的问题。这样的一个题材，将会使你的讲演在今后几十年的时间里成为人们议论的话题"。不过闵可夫斯基对这一题材发表了一些意见：希尔伯特未必愿意把自己解决某些问题的想法公诸于众。国际上的听众未必对此感兴趣。再说，做预言必竟不是一件容易之事。

对希尔伯特来说，在国际数学家大会上报告自己的成果，远比提出新问题容易得多。当时，希尔伯特正值科学创造活动的盛年，业已作出了许多世所公认的成绩。然而，他没有以他的优异论文来回答数学家，却选择了展望未来数学发展的题材作讲演。希尔伯特在思索着20世纪数学的发展。一直到该年6月份，他的讲演稿还没有写出来，大会的议程表已经发到了代表们的手中，其中没有列入他的讲演。闵可夫斯基很失望，他写信给希尔伯特说："我已经没有去参加这次会议的愿望了。"但是到了7月中旬，希尔伯特终于给闵可夫斯基寄去了一包样稿。

真正的友谊是在朋友遇到困难的时候，共担忧愁和痛苦。闵可夫斯基不再说他不想去巴黎了。他以极大的热情和赫维茨一起仔细阅读校样并作了研究，帮助希伯特作进一步修改。为了提出二十三个问题，希尔伯特从准备到完稿总共花费了整整八个月的时间。

重要的问题历来是推动科学发展的真正动力，但一位科学家如此自觉地为推动科学前进而筹划，并且如此持久地影响一门学科的发展，在历史上确为罕见。

1900年8月8日上午，迎接着20世纪数学

史上的一个重要时刻的到来。一位不到四十模样的人登上了国际数学讲坛。他，虽然朴实无华，却透逸出刚强的品格和卓越的才智，吸引着当时在场的每一位听众的心。他就是希尔伯特。

为了照顾不太听得懂德语的听众，希尔伯特缓慢地、审慎地开始了他的讲演。

"我们当中谁不想揭开未来的帷幕，看一看今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？

"历史教导我们，科学的发展具有连续性。我们知道，每个时代都有它自己的问题，这些问题后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题。如果我们想对最近的或将来的数学知识可能有一个概念，那就必须回顾一下以往未解决的问题，同时检阅一下当今科学提出的、期望在将来能够解决的问题。现在，当此世纪更迭之际，我认为正适合于对问题进行这样一番检阅。因为，一个伟大时代的结束，不仅促使我们追溯过去，而且把我们的思想引向那未知的将来。

"某类问题对于一般数学进展的深远意义以

及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题，他就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡和中止。正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要看自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志和力量，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自己的境界。”

“……。”

“这种相信每一个数学问题都可以解决的信念，对数学工作者是一种极大的鼓舞，在我们中间，常常听到这样的呼声：这里有一个数学问题，去找出它的答案。你能够通过纯思维找到它，因为数学中没有不可知！”

根据闵可夫斯基和赫维茨的建议尽量缩短他的讲演，希尔伯特只从讲稿中选出十个来作了解说。其中头三个问题与数学基础有关；接下来讲了选自算术和代数的四个问题，着重说明了第八问题中黎曼猜想的重要性。最后三个是从函数论中提出的。

希尔伯特的演说获得了极大的成功。在国际数学家代表大会其余的日子里，大卫·希尔伯特关于20世纪的数学问题却吸引了整个数学界的

想象力，大批数学家投入到解决希尔伯特问题的激流中去。与希尔伯特问题有关的第一个重要结果是在1900年得到的。希尔伯特的学生德恩给出了第三问题的部分解答。次年，德恩完全解决了这个问题。于是，他便成为对于解决希尔伯特二十三个问题作出贡献的第一名数学家。

迄今为止，已完全解决的希尔伯特问题约占一半，有几个问题比较笼统，难以判定解决与否，大约三分之一的问题悬而未决，有的则相差得很远。值得庆幸的是中国数学家在希尔伯特的第八和第十六问题上曾经作出过一些贡献。

3.2 成功在于勤奋

1862年1月23日，希尔伯特出身于东普鲁士的哥尼斯堡（现属苏联）。希尔伯特的祖父是位法官，获有“枢密顾问”的荣誉头衔。父亲是一位法国乡村人，母亲是一位不同凡响的女性，她不仅对哲学和天文学饶有兴趣，还热衷于素数的研究。

哥尼斯堡，这可是一座不平常的城市。那里曾经培育出一位伟大的居民——著名哲学家康德。他是古典唯心主义的创始人，一生没有离开过这

座城市.此外,哥尼斯堡大学傍倚普累格尔河的两条支流，有七座桥横跨普累格尔河，其中有五座把河岸和湖心岛连接起来。这些桥引出了一个著名的数学问题——哥尼斯堡七桥问题，哥尼斯堡从此载入数学史册。

希尔伯特的成长深受康德思想的影响，每年4月22日是康德诞辰的纪念日，他陪伴着爱好哲学的母亲去瞻仰康德的半身像，在他那幼小的心灵深处铭记下这样一句格言：

“世上最奇妙的是我头上的灿烂星空和我内心的道德标准”。

他的父亲对他的教诲是：准时、俭朴和讲信义；勤奋、遵守法纪.他的母亲必然也给他指点过夜空的星座，为他介绍过那些饶有趣味的素数。

希尔伯特八岁时开始上学，起初在皇家腓特烈预科学校的初级部，学习一些最基本的知识。1872年秋，由于苏俄沙皇政府迫害犹太人，一家姓闵可夫斯基的俄国籍犹太人到哥尼斯堡定居，和希尔伯特家只隔一条河。闵可夫斯基家有三个儿子，才华都很出众，而且每个人都有着迷人的性格，小儿子赫尔曼的数学才能尤为突出。有一堂数学课,老师因解错一道数学题而“挂黑板”，同学们异口同声地叫道：“闵可夫斯基，去帮帮

忙！”．相比之下，小时候的希尔伯特却不引人注目，希尔伯特回忆时说自己是一个笨孩子．他孩提时的朋友旁证道：“希尔伯特讲过的每一件事情，不管言语多么令人费解，甚至自相矛盾，都使人感觉到他那种强烈的，常常是感动人心的追求真理的愿望．”

希尔伯特求学的腓特立预科学校，在哥尼斯堡是一所久负盛名的名牌学校，康德也毕业于此．可是它的课程因循守旧，数学课的份量也属可怜的少．希尔伯特认识到自己的记忆力很差，而在腓特烈预科学校所设的大部分课非要死记硬背不可．此外，他理解概念的反应也极慢．学习上的困难，并没有使他退却，他以坚韧不拔的毅力，刻苦用功地学习．每当理解一件事情时，非得通过自己的消化，彻底弄清楚不可．

1879年9月，希尔伯特结束了腓特烈预科学校那些令他不愉快的日子，转学到威利预科学校，那里非常重视数学，老师更是悉心给予辅导．“精神聚，无钜不成”．希尔伯特所费心血没有白花．毕业时，他的成绩出类拔萃，几乎每门功课都获“优等”；数学更好，得了最高分“超等”．在获取毕业文凭的考试中，他因笔试成绩出色，免去了口试．毕业证书的品德评语中写

道："他的勤奋好学堪称'模范'，对科学有浓厚的兴趣"，"他对数学表现出强烈的兴趣，并且理解透彻；他能以极好的方法掌握老师讲授的课程，并能正确地、灵活地运用它们"。

的确，希尔伯特已经找到了一门非常适合于他的课程——数学。正如他后来所说的：因为它无须死记，按照推理总能推导出结果。以后，希尔伯特在数学这个广阔天地里，取得了许多重大成果。他把这些成就归因于勤奋，并喜欢引用名言："天才就是勤奋。"

3.3 希尔伯特与黎曼猜想

不象历史上那些喜欢孤独甚至默默无闻进行创造的伟大天才，希尔伯特的天性充满生活的热情，他谋求同其他人交往，尤其同青年科学家来往，并且在交流思想中得到乐趣。文静的闵可夫斯基进入希尔伯特的生活圈中，使希尔伯特享受到更大的欢乐。希尔伯特在家里频繁举行晚会，晚会上也常跳舞，但主要的内容是谈话。参加晚会的人们争先恐后地提出或回答问题，产生一股浓烈的学术气氛。

有时，有人会提出一个话题，并问希尔伯特

有何见解，比如他对占星学怎么看？没有片刻的犹豫，希尔伯特就会用毫无改变的口音斩钉截铁地回答说："要是把天底下最聪明的十个人集合起来，请教他们世界上最愚蠢的事情是什么？他们一定会告诉你：没有比占星学再愚蠢的了！"。有时大家会谈到对伽利略的宗教审判，有人责备伽利略没有为了自己的信念坚持到底。希尔伯特则表示反对："伽利略并不是一个傻瓜。只有傻瓜才相信科学和真理需要宗教式的殉道，科学成就要依靠时间来证明自身的正确"。闵可夫斯基不象希尔伯特那样侃侃而谈。但他所发表的意见非常中肯，总是切中题意。由于他从小喜欢阅读莎士比亚、席勒和歌德等名人的作品，文学水准很高。他常引用《浮士德》里的诗句，并且用得很贴切。当他谈论时，希尔伯特在一旁倾心而听。而希尔伯特自己在发表意见时就要大胆得多。

当人们问起希尔伯特将来最重要的技术是什么？他毫不犹豫地回答道："到月球上去抓苍蝇。"为什么？"因为实现这一目标，所必须解决的附加技术问题，就意味着要解人类面临的几乎一切物质困难。"最重要的数学问题是什么？他不加思索地答道："ζ函数的零点问题，不仅在数学上最重要，而且是绝对的重要！"

然而，科学发展至今，人类可以乘坐宇宙飞船登上月亮，驾驶航天飞机到太空中遨游。但对于数学中的黎曼猜想却知道得很少。

关于黎曼猜想，有这么一段故事。其是否真实并不清楚。有一次希尔伯特的一个学生交来一篇证明黎曼猜想的论文。由于所提问题是最极端地重要且困难的问题，希尔伯特仔细审阅了这篇文章，被它的深刻的论证紧紧地吸引住了；但可惜在其中发现了一个他自己也无力纠正的错误。

人最宝贵的是生命，然而生命是由一分一秒的时间累积起来的。有了时间，才能争取到一切。第二年，这位学生不幸失去了所具有的最宝贵的生命。希尔伯特万分悲痛，向死者的双亲请求允许他发表一个葬礼演说。葬礼在一个阴雨迷茫的日子举行，在阴霾漫布的墓地，在死者的亲友们的一片哀哭声中，希尔伯特致了悼词。他首先指出，这样一位年轻的天才，在他的才华还没有得到充分发挥以前就离开了人世，这是多么令人痛惜啊！希尔伯特接着说：这个年轻人对黎曼猜想的论文虽然有错，但沿着他的路子走下去，是有可能解这个著名问题的。事实上，希尔伯特冒雨站在死去的学生墓前，再次用强烈的语调激励人们去排除困难险阻，去征服黎曼猜想。

希尔伯特一直非常重视解决黎曼猜想，把猜想列为巴黎演说的第八个问题。面对这样一道“超级”难题，象他这样一位数学大师也只能望洋兴叹，爱莫能助。1914年，哈代在黎曼猜想研究上取得惊人突破的时候，希尔伯特再次唤起信心，认为最近对猜想的研究已取得很大的进展，有希望能在自己活着的时候见到它的证明，但事与愿违。

后来，许多数学家在希尔伯特发展起来的代数域理论的基础上，证明了类似的黎曼猜想。但黎曼所提出的猜想至今仍无法解决。

3.4 共同的事业，真诚的友谊

在19世纪数学王国里，耸立着高斯的伟大形象。对于这个日益繁荣的精神世界，不断涌现出康德、黑格尔、费尔巴赫、马克思、席勒、歌德、贝多芬等等一大批杰出人物。柏林已经成为德国的文化中心。希尔伯特很幸运，他的家乡虽然远离文化中心，但那里的哥尼斯堡大学却是一所具有优良传统的大学。高斯时代仅次于高斯的大数学家雅可比就曾执教于此。1880年秋，希尔伯特进入大学。一开始他就发觉大学的生活与从

前预科学校的严格校纪有天壤之别。教授们想教什么就教什么，学生想学什么就学什么。平时也不考试，直到为取得学位才考一次。自由发展的环境，为希尔伯特攻读数学提供了良好的条件。他全力以赴地致力于学习数学，并且不顾父亲的反对，坚持把它选作自己将来的职业。

大学的第二学期，按规定学生可以转学，他选择了海德堡大学。亲耳聆听了名家富克斯的课。富克斯的课别具匠心。他课前不作太多的准备，课堂上习惯于把自己置于险境，对要讲的内容现想现推，为的是让学生得到瞧一瞧数学思想的实在过程的机会。这种“现想现推”式的教学为希尔伯特终身难忘。接着一学期，希尔伯特本来可以转往柏林听课。由于他深深地眷恋着故乡，于是他毅然回到哥尼斯堡大学。以后，一直到他在哥尼斯堡念完大学。

1882年秋季，年仅十七岁的闵可夫斯基结束了三个学期在柏林的学习生活，回到哥尼斯堡。这时，他正踌躇满怀，沉浸于一项很深奥的研究之中，企求赢得巴黎科学院的数学科学大奖。巴黎科学院出榜征解的题目是：将一个数表成五个平方数之和。闵可夫斯基的研究结果大大超过了原问题。科学院的接受稿件的截止期快到了，根据

比赛规则非要译成法文，而闵可夫斯基已来不及把它翻译成法文。事已如此，他还是决定投稿应征，在题首引用了这样一句格言：

“没有什么比真更美好，唯独真实最可爱”。

翌年，比赛揭晓了，刚满十八岁的闵可夫斯基与英国著名数学家亨利·史密斯共享了这份大奖。闵可夫斯基成了哥尼斯堡的“知名人士”。此时此刻，此情此景无不振奋希尔伯特的精神。他很快地同这位腼腆、稍带口吃、却颇具才气的闵可夫斯基交上了朋友。这两个年轻人的家境不同，性格迥异。但是，共同的志趣使他们和谐地结合在一起，研究共同的事业。

1884年春，哥尼斯堡来了一位年轻富有才华的教师，名叫阿尔道夫·赫维茨。他年纪不足二十五岁，就从哥廷根到哥尼斯堡大学任副教授。他象闵可夫斯基一样，在数学方面留下了天资早熟的美誉。在预科学校学习时，他的数学才华就显露出来，得到老师舒伯特的青睐，所以老师在每星期天专门向赫维茨讲授他自己所擅长的学问——“舒伯特演算”。并且千方百计地鼓励赫维茨的父亲，支持他的孩子学习数学。后来，赫维茨在当时德国最了不起的年轻数学家菲力克斯·克莱茵门下，获得博士学位。这位见多识广、博

学多才，仅比希尔伯特大三岁的赫维茨，成了希尔伯特和闵可夫斯基的真正老师。

当希尔伯特一接触这位新老师，就从他的谦虚、质朴的外表发现：他那眼睛闪烁出聪慧和快意的光芒，象征着他的精神。希尔伯特和闵可夫斯基很快就同赫维茨建立了密切关系。每天下午"准五时"，会聚在苹果树下，一起散步，讨论数学问题，开创了史无前例的交流方式。在日复一日的散步中，他们几乎走遍了数学世界的每一个王国，讨论了当代数学的现状，互相交流彼此的想法、最新得到的结果和未来准备做的工作。赫维茨以其全面，系统的知识对另外两位有着深刻的影响。希尔伯特从这种有趣而又使人容易接受的学习方式中，象海绵吸水一样吸吮着数学知识，给自己的未来事业打下了稳固而又全面的基础。难怪乎有人说：希尔伯特所受到的最大影响不是主要来自看书、听课和参加讨论班，而是来自与两位青年数学家的交往。

希尔伯特在大学度过了整整八个学期，走完了取得博士学位的必经之路，开始考虑选什么题目来作他的学位论文。在他的导师林德曼建议下，选择了当时最时兴的课题——代数不变量理论。虽说代数不变量理论是当时非常热门的课

题，但究其渊源却要追溯到17世纪笛卡儿发现的解析几何。其中所提及的坐标变换就是研究一个图形相对于坐标轴改变时，图形本身的形状和大小不变。相应的代数形式的某些性质亦保持不变。经过近一个半世纪的发展，代数不变量的内容与昔日已不可比拟。难题的解决有助于考究一个人的才能。显然，这次希尔伯特显示出了他的创造能力，找到了一条独树一帜的证明方法。漂亮的结果引得了导师林德曼和数学界其他同行的赞誉。

论文的手抄本用快件寄给了闵可夫斯基。他的父亲刚去世，他在家里陪伴着他的母亲。闵可夫斯基回信给希尔伯特道："我以极大兴趣研读了你的论文。整套处理方法都使我高兴万分。…我从没想到这么精彩的数学定理会出现在哥尼斯堡！"闵可夫斯基的称誉振奋着希尔伯特的精神。希尔伯特最后通过了口试，并获得了哲学博士学位，在科学研究生涯中又迈开了一步。不久，希尔伯特又通过了国家考试，获得了哥尼斯堡大学的讲师资格。此后，又攻克了不变量理论中著名的果尔丹问题。

1885年夏天，闵可夫斯基回到了哥尼斯堡，并取得了博士学位，紧接着被召服兵役。两个人

的分离，并没有影响他们间的友谊，他们用书信来往相互交流思想。

在德国各大学中争夺学术职衔的竞争是非常激烈的，当了八年副教授的赫维茨接受了瑞士一所大学任正教授的提名。尽管这意味着那日复一日的数学散步的结束，但却使希尔伯特得以接替赫维茨的位置。

1892年8月，教授会议决定，由希尔伯特接任赫维茨的职位。他把这消息告诉了闵可夫斯基的时候，同时宣布了他举行婚礼的日子。让他的好友闵可夫斯基共同分享他的快乐。

不久，林德曼接受了慕尼黑大学的邀请，而由31岁的希尔伯特接任林德曼的职位。这也为闵可夫斯基来哥尼斯堡接任希尔伯特的副教授职位带来了良好的转机。希尔伯特竭力争取为他的朋友获得了这一职位。1894年春天，随着闵可夫斯基的到来，每天到苹果树下散步以及关于数论的讨论又重新开始了。自古道："月有阴晴圆缺，此事古难全。"过不了多久，这两位肝胆相照的朋友又得分离。12月初，希尔伯特接到了世所公认的德国数学界的领袖克莱茵来自哥廷根的信。信中说道："我将尽力让你取得这里的任命。""为了我的科学团体，我需要你这样的人。因为

你的研究方向，你丰富而强有力的数学思想，以及你处在富于创造活动的年龄。”“你还能产生使我返老还童的影响。”“但是有件事你今天就得答应我：倘若你接到任命，你将不会谢绝！”

在克莱茵的竭力支持下，希尔伯特在哥廷根获得了教授职位。希尔伯特虽然高兴地接受了哥廷根的教授职位.但也有两件事使他烦恼.其一，他的夫人喀娣不太愉快。其二，哥廷根的社会环境，虽然能给希尔伯特在科学上予以更大的激励，但缺少他在哥尼斯堡已经习惯了的热烈气氛.

在哥尼斯堡，闵可夫斯基几乎立即接替了他朋友的职位，闵可夫斯基在新职位上很愉快。但是，自从希尔伯特离开哥尼斯堡后，他再也没有到苹果树下散过一次步.

1895年3月，希尔伯特来到哥廷根时，差不多是高斯到达之后的整整一百年。希尔伯特来到哥廷根后，认真准备着1893年德国数学会要求他和闵可夫斯基在两年内合作完成的一篇数论报告.他把它当作未来希望的重要基础.1896年希尔伯特的那部分报告接近完成，而闵可夫斯基那部分由于种种原因不能按时完成。全稿的清样工作都由闵可夫斯基和赫维茨极为仔细地研读。他们的建议和修改意见不断地寄往哥廷根，使希尔伯

特有点不耐烦了。闵可夫斯基反而为此写信安慰他：“细致有好处。”“报告很快会完成，并获得高度的评价，请您想想这点，并以此告慰自己。”报告定稿后，希尔伯特为它写了一篇序言，充分表达了自己撰写这篇杰作的思想方法。《报告》出版后，闵可夫斯基又以最大的热忱写信祝贺道：“我相信，在不久的将来，你将会列入数论领域中伟大的经典学者的行列。”

又过了几年，时间的进程已推向1908年。这年夏天，往常显得豪爽和乐观的希尔伯特变得神经过敏、精神恍惚。闵可夫斯基却处在富有巨大创造力的顶峰。他为相对论引进了他自己提出的极为简单的数学空—时观，根据这种思想，同一现象的不同描述能用极其简单的数学方式表示出来。当闵可夫斯基把奇妙的数论撂在一边研究电动力学时，从夏天的心衰力竭之中恢复过来的希尔伯特却被一个声名昭著的经典数论问题诱进了数论圈子。1770年，英国数学家爱德华·华林断言：每一个整数必可表示为四个平方数之和、九个立方数之和、十九个四次方数之和等等；一般地，任给一整数n，必存在整数，使得对任意正整数N，下述不定方程有整数解：

$$N = x^n_1 + x_2^n + \cdots + x^n_k,\ x_i \geqslant 0\ (i = 1,$$

$2,\cdots,k)$

希尔伯特沿着赫维茨所指引的路，在1908年年底，他得到了华林定理的一个证明，距华林首次提出他的猜想正好138年。

可是，1909年1月21日闵可夫斯基还没来得及向他的老朋友祝贺，患阑尾炎医治无效，离开了人世。他还不满45岁，正充满着生命的活力，正投身于他最喜爱的事业，正处在他科学创造活动的高峰，他就这样离开了欢乐多于哀愁的世界。强有力的数学家也都象常人一样为之无措手足，克莱茵发现自己平静地讲话是困难的，希尔伯特和龙格好象变了样，他们眼泪汪汪，眼睛都哭红了。

华林问题的解答不久就出版了——“亡故者那万无一失的目光已不会在校样上停留。”作者的题赠是：

“为了纪念赫尔曼·闵可夫斯基。”

这年春天，向来“高产”的希尔伯特没能给哥廷根科学会寄去文章，他和他的夫人花了许多时间陪伴闵可夫斯基夫人和他年幼的女儿。并担任了编纂闵可夫斯基著作集的总编辑，重温了闵可夫斯基生前给他的90封信。并在哥廷根科学会举办的专门会议上发表了一篇纪念的讲话。

希尔伯特为失去了这样一位挚友而无比痛惜之时，他清醒地认识到，为了自己的科学创造，必须与年轻人密切联系，也是在这时，希尔伯特开始了同柯朗的友谊。

3.5 代数数域上的黎曼猜想

1893年德国数学会要求希尔伯特和闵可夫斯基合作在今后两年内提交一份数论报告。闵可夫斯基不久就放弃了这项工作，而希尔伯特独立完成的那篇《代数数域理论》的报告大大地超过了学会所期望的。成为现代数学文献中一颗灿烂的明珠。这篇报告至今一直指导着代数数论的研究工作。此理论与至今没有解决的“超级”难题——黎曼猜想有着紧密的联系。

数学的本质是研究数的性质。而研究整数性质的数论，无疑是数学中最重要的一部分。高斯称誉数论为数学的皇后。这句话未免有点夸张，但作为其他科学的典范，数学知识的永不枯竭的源泉，数论受之无愧。

希尔伯特在代数数论方面所作的工作是承前启后的概括性总结。他利用代数数域理论中的重要问题——阿贝尔扩张问题，着手研究数域的阿

贝尔扩张理论，也称类域论．希尔伯特的数论报告不但弥补了许多原来研究的漏洞，而且把整个理论铸成一个统一的整体，并引进新概念证明一些新的定理，构成了今天相对阿贝尔域的一般理论基础．在报告的引言中，他曾指出："代数数域论中装备最丰富的部分，我认为是关于阿贝尔域和相对阿贝尔域理论，它们是由于库莫尔关于互反律的工作和克隆尼克关于椭圆函数复数乘法的研究而被开拓的．这两位数学家对这个理论的深刻见解告诉我们……还有大量隐藏的宝藏在向人们招手，那些了解它们的价值，一心想试一试能赢得这些宝藏的技艺的探索者，将会得到丰富的报偿．"其后两年中，希尔伯特就挖掘出隐藏的许多宝藏．他始终贯彻他的指导原则，与单变量的代数函数中相应的问题进行类比，研究希尔伯特如何从特殊上升到一般，创造出正确的概念和方法，使本质的结论油然而生，那也是一大乐趣．希尔伯特在详细分析例子的基础上，十分清楚地猜测到类域的基本事实．半个多世纪以来，数论专家们象冯特万格勒、高木、哈塞、阿丁、薛伐莱的大量工作都是从事于希尔伯特的猜测．希尔伯特由 ζ 函数导出某种辅助理想的存在，很大程度上靠超越的论证方法．后来发展到逐步消除这种

方法，并且证明，虽然超越方法对于研究素理想的分布是强有力的工具，但对类域问题却没有办法。

代数数域是有理数域Q的有限次扩张。对于一个固定的代数数域k，可以考察它的正规扩张域K，每个K对应一个伽罗华群$G(K/k)$。假如伽罗华群$G(K/k)$是阿贝尔群，这个扩张就称为阿贝尔扩张。类域论就是研究怎样用k的元素描述k的所有阿贝尔扩张问题。1920年，日本数学家高木贞治首先完成了类域论的研究。对所得到漂亮定理，高木给出了非常繁复的证明，其间用到了解析方法，主要运用了广义的狄利克莱L级数。因此，最好能够简化证明甚至取消解析方法。阿丁开创了这方面的工作，最终由薛伐莱得到彻底解决。

阿丁的博士论文所研究的问题是：把k不看成代数数域，而当作有限域上的代数数域。考虑了有限域上有理函数域的二次扩张。每一扩张都有一个相应的ζ函数，而ζ函数的本质问题就是黎曼猜想。阿丁在许多特殊情况下，证明了黎曼猜想，他的证明技巧已经透逸出数学大师的本色。沿着这个方向，重要成果接踵而来。1931年，施密特考虑有限域上一般的单变量代数函数域，发现了ζ函数方程，并发现了它与著名的黎曼——洛克定理间的关系。1933年，哈塞证明了椭

圆函数域的黎曼猜想．1941年，魏依最后证明了任意单变量代数函数域的黎曼猜想，他用的是代数几何方法．1974年，年轻的比利时数学家德林证明了魏依猜想．这是魏依在1941年解决任意单变量代数函数域上的黎曼猜想之后，提出了对于更为一般簇的猜想．德林的工作被数学界公认为时代的成果．

希尔伯特完成了整个类域论这座优美大厦的设计工作．经后人不惜的努力取得了巨大的成功．但这不是终结，这仅仅是提供了一把通向未知世界大门的其中一把钥匙．黎曼提出的猜想依然如故，还有许多问题有待解决．

3.6 数学基础

众所周知，现代数学大厦建筑在集合论基础上，现代数学也因此得到蓬勃发展．十分惊人的是，当我们欣赏现代数学的完美、精确时，谁能料想到这座富丽装饰的大厦基础上至今还留下一条难以弥补的裂缝！这就是希尔伯特二十三个问题中的第一和第二个问题的核心．

1874年，康托发表了第一篇集合论的文章，指出无穷之间也有差别．引起了当时不少数学家

的怀疑甚至愤怒。直至1895年和1897年康托发表了他的最后两篇集合论文章，引出了“序数”的概念，集合论也开始逐渐被人们所接收。但是，集合论本身也暴露出一些矛盾，康托首先发现了集合论的内在矛盾。他在1895年的文章中遗留下两个悬而未决的问题：一个是连续统假设；另一个是超穷基数的可比较性。但他没有明显地叙述其矛盾之处。然而，集合论中的一些矛盾终究会暴露出来。早在1894年和1895年，人们就发现“集合的集合”这句话存在逻辑上的矛盾。若说“M是一切集合组成的集合”，则有一切集合都应是M的元素，M是集，M当然亦是M中的元素。这岂不陷入了矛盾？从此以后，数学中这种悖论四起，令数学家惶惶不安，感到数学陷入危机之中。接踵而来的对康托和集合论的攻击，致使这样一位天才数学家身患精神抑郁症，于1918年1月6日，在萨克森州的哈尔精神病院去世。

1908年，意大利数学家策梅罗提出了集合论公理，用这套语言可避免“一切集合的集合”之类的悖论出现。后来弗莱克尔作了补充，根据他们名字的第一个字母，称这一公理为 ZF公理。康托的集合论又开始被世人接受。

时至1918年，英国哲学家和数学家罗素提出

了著名的"理发师"悖论.这一悖论是那样的清晰，以至数学家们几乎没有什么可供辩驳的论点."理发师"悖论如同一颗重磅炸弹，炸闷了几乎所有开始接受集合论思想的数学家. "理发师"悖论的大意是：理发师有一个预先约定，他给所有不自己刮胡子的人刮胡子，但不给任何自己刮胡子的人刮胡子. 在这约定下，理发师该不该自己刮胡子？如果理发师是自己给自己刮胡子的，那么他不该给自己刮胡子. 如果理发师从来不给自己刮胡子，那么按约定，他又应该给自己刮胡子. 因此不论理发师是否给自己刮胡子，都将陷入自相矛盾. 如此一来，"理发师应该给自己刮胡子"和"理发师不应该自己刮胡子"都不能成立. 逻辑上非此即彼，这样一条基本原理在此竟然行不通了. 罗素悖论震撼了数学界，被人们视为天衣无缝，绝对正确的数学基础也出现了自相矛盾，这是何等地令人吃惊！

罗素悖论使数学家感到"数学危机"再次到来，于是根据各自不同的哲学观点，努力设法消除这个怪物. 以罗素和怀特黑德为代表的逻辑主义；由以克罗内克首先创导，庞加莱支持，布劳维尔发展的直觉主义；以及希尔伯特为代表的形式主义；相继问世，一场大论战已不可避免.

无独有偶，1900年之后，物理学中也产生了巨大的变革．米切尔森和莫利的光速不变实验和黑体辐射现象已使古典的牛顿力学和麦克斯韦电磁学方程处于不能自圆其说的境地．这两片阴云孕育了一场急风暴雨，待到雨过天晴；人们惊奇地发现，物理学的面貌已焕然一新．其中爱因斯坦的相对论代替了牛顿力学，量子力学替代了电磁学方程．发生在古典物理领域的革命已初战告捷．

1907年，正值悖论引起数学基础危机的时候，一位名叫布劳维尔的年轻荷兰人向这样的信念提出了挑战，这种信念认为：古典逻辑是绝对可靠的，不依赖于应用它们的具体对象．布劳维尔提出了一个激进的计划，他反对在数学中使用排中律，主张用构造方法来研究数学；反对“数学的存在主义”，只承认有限以及不断增大的有限，却永远达不到无限．这些新思想卷走了希尔伯特杰出的学生外尔，外尔很乐意被这激荡着的时代新潮流席卷而去，或者只是经受这种新潮流的磨炼，他都会感到无比的欣慰．对他来说，基础危机是不可抗御的．他仔细地研究了直觉主义，并做出了自己的贡献．当然，布劳维尔的直觉主义可以避免悖论的出现，但经典数学中的许多完美结果将被抛弃．

在这种情况下，希尔伯特大声咆哮着起来捍卫数学。他道："禁止数学界使用排中律就好比禁止天文学家使用望远镜，禁止拳击家使用拳头。"他确信无须"背叛我们的科学"就能够恢复其完整的确定性。他建议，将数学形式为一系统，这个系统的对象，通过符号逻辑的语言表述为语句，而这些语句只有逻辑结构而无实际内容。形式系统的这些对象可以用这样的方式来选择：就一门数学而言，这个系统应真实地表现这门数学理论。这个形式的相容性的证明，希尔伯特提出了一个合理要求：符号的数目是有限多个，推导步骤也是有限多步。在这里，悖论仅仅是不相容的一种表现。

1931年，奥地利数学家哥德尔完成和发表了他的重要论文论：《数学原理和关于系统Ⅰ中的形式不可判定问题》。文章证明了一条著名的、后来以他的名字命名的定理——哥德尔不完全定理。不完全定理指出：在包含初等数论的一致的形式系统中，存在着一个不可判定命题，命题本身和它的否定命题都不是这个系统的定理。该定理的推论则指出：一个包含数论形式系统的一致性，在系统内部是不可证明的。这样一来，希尔伯特的设想已不可能实现。他只得做出让步，同

意使用诸如“超穷归纳”之类的方法来证明算术的无矛盾性。

哥德尔定理的证明，使用了现今被称为形式系统算术化的方法。在此意义上，那个既不能肯定也不能否定的命题可以说是人为的产物。作为所谓“存在的证明，”它对现在数学家们眼前某些难题的不可判定性没有提出任何线索。例如，黎曼猜想，即关于 $\zeta(s)=0$ 方程解的不可判定性如果任何人用任何方法予以揭示的话，哥德尔的不完全性定理将会引起更多人的关注。时至今日，数论中这样的事件还未发生过。

希尔伯特一生中的最后一个重要的工作计划是使数学形式化并用确切的证明建立起它的相容性。尽管这项计划遭到哥德尔工作的打击，但希尔伯特为把数学从矛盾中解脱出来并使人们获得自由的观念，无疑击败了他的对手束人手脚的构造主义思想。

由于希尔伯特对数理逻辑和数学基础的进行深刻，执着地探索，在数学科学研究领域又增添了一门新学科——元数学。

希尔伯特的晚年生活是相当不幸的。他十分痛苦地目睹德国法西斯把他亲自创立的哥廷根学派毁灭掉。1943年2月14日，他在孤寂中与世长

辞了。

但是，迄今为止，关于数学基础的争论，仍未结束。数学的基础上仍然存在着裂缝，人类数学思维领域并不是毫无矛盾、那样地完美与和谐。填补裂缝的根本方法在哪里？这还是一个谜。

附　录

希尔伯特在1900年巴黎世界数学家大会上，提出的二十三个问题和研究进展的简表：

问题编号	问　　题	推动发展的领　　域	解决情况
1.	连续统假设	公理化集合论	1874年，康托猜测在可数集基数和实数基数之间没有别的基数，即著名的连续统假设。1938年，奥地利数学家哥德尔证明连续统假设和 ZF 公理系统的无矛盾性。1963年，美国数学家柯恩证明了连续统假设与 ZF 公理彼此独立。因此，连续统假设不能用世所公认的 ZF 公理证明其对或错。
2.	算术的无矛盾性	数学基础	欧氏几何的无矛盾性可归纳为算术公理的无矛盾性。希尔伯特提出用形式主义的证明论方法加以解决。但1931年哥德尔的"不完备定理"加以否定。1936年根茨用超限归纳法证明了算术公理的无矛盾性。而数学的相容性问题至今未解决。

续表

问题编号	问　　题	推动发展的领　　域	解决情况
3.	两等高底的四面体体积相等问题。	几何基础	1900年，由希尔伯特的学生德恩解决。
4.	两点以直线为最短距离问题	几何基础	此问题过于一般。1973年，苏联数学家波格列洛夫宣布，在对称情形下，问题获得解决。
5.	不给所定义群的函数作可微性假设的李氏概念	拓扑群论	这个问题简称连续群的解析性，即是否每一个局部欧氏群都一定是李群？经过一般漫长的时期后，于1952年由格利森、蒙哥马利及齐宾共同解决，答案是肯定的。
6.	物理学的公理化	数学物理	希尔伯特建议用数学的公理化方法推演出全部物理。1933年，柯尔莫哥洛夫将概率论公理化。在量子力学、热力学等部门，公理化已获很大成功。但是，物理学是否能全盘公理化，这工作至今没有完成。
7.	某些数的无理性与超越性	超越数论	问题要求证明：若α是代数数，β是无理数的代数数，则α^{β}一定是超越数或至少是个无理数（如例$2^{\sqrt{2}}$和$e^{\pi}=i^{-2i}$）。1934年，苏联数学家盖尔封特和德国数学家施奈尔德各自独立地解决了这一问题家1966年后，又被英国数学．贝克等人大大地推广和发展。
8.	素数分布问题	数论	这问题包括黎曼猜想、哥德巴赫猜想及孪生素数猜想。一般情形下的黎曼猜想仍然是个猜想。而后两个问题亦还未得到最终解决，中国数学家陈景润在后两个问题上取得领先地位。

续表

问题编号	问　　题	推动发展的领　　域	解决情况
9.	任意数域中的最一般的互反律的证明	类域论	该问题已由德国数学家阿丁于1927年解决，但类域论至今仍在蓬勃发展。
10.	丢番图方程的可解性判别	不定分析	求出一个整系数方程的整数根，称为丢番图方程可解。希尔伯特问：是否能用有限步构成的一般算法判断一个丢番图方程的可解？1970年，苏联数学家马蒂塞维奇在美国数学家戴维斯、普特南、罗宾逊工作基础上证明了希尔伯特所期望的一般算法不能实现。
11.	系数为任意代数数的二次型	二次型理论	德国数学家哈塞和西格尔分别在20年代和30年代获得重要结果.60年代,法国数学家魏依取得了新的重要进展。
12.	阿贝尔域上克罗内克定理推广到任意代数有理域上	复乘法理论	这问题只有些零碎的结果，离解决还有很长一段距离。
13.	用两个变量解一般的x次方程的不可能性	方程论和实函数理论	七次方程 $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$ 的根依赖于三个参数a、b、c；$x=x(a,b,c)$是否能用两个变量的函数表示出来？1957年，苏联数学家阿诺尔德解决了连续情形。1964年，他的同胞维士斯金又推广到连续可微情形。如要求是解析函数，则问题仍未解决。
14.	证明某类完全函数系的有限性	代数不变量理论	1958年，日本数学家永田雅宜给出了反例，证明了存在群Γ，其不变式所构成的环不具有有限个整基。

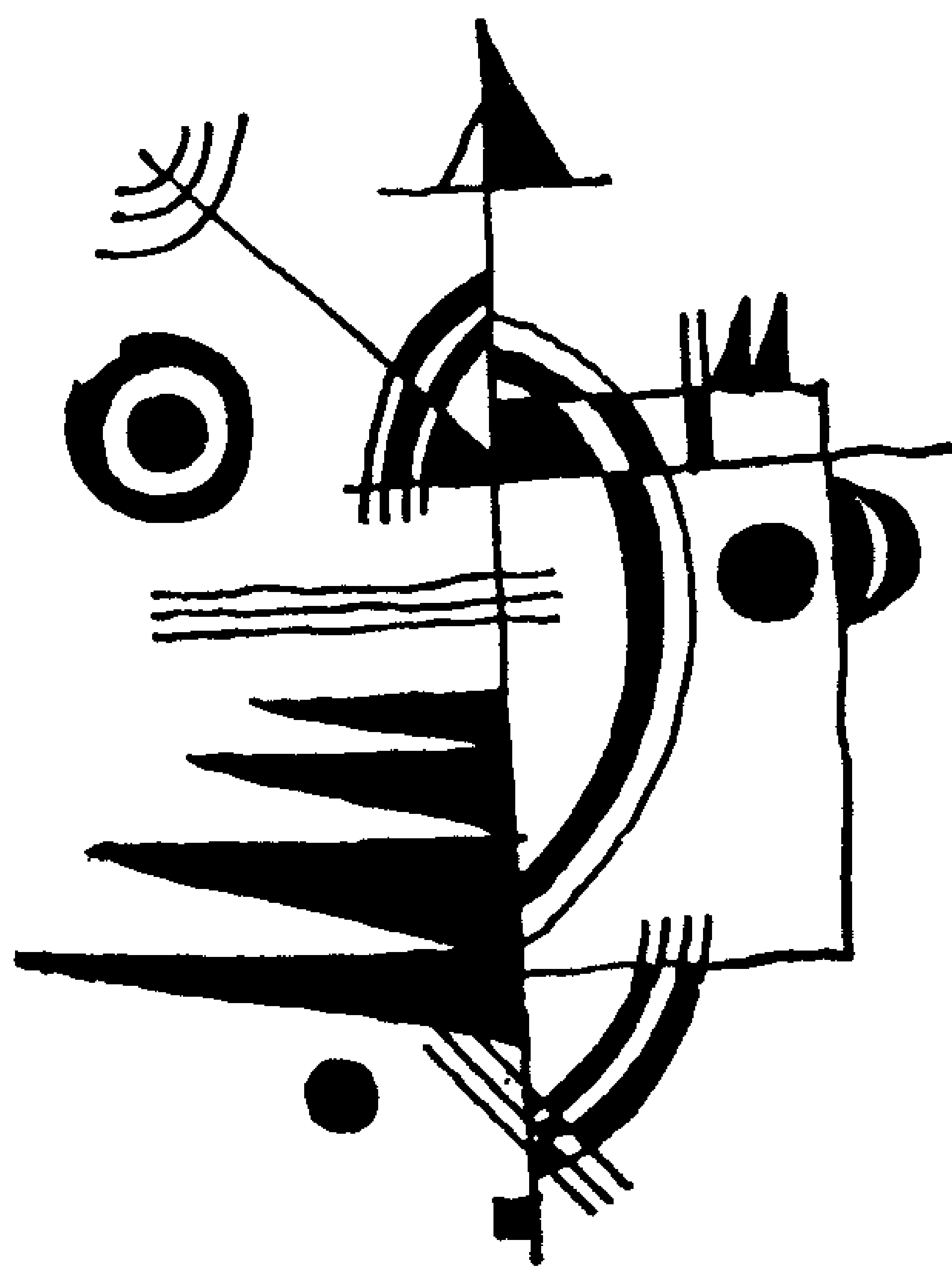
续表

问题编号	问　　题	推动发展的领　　域	解决情况
15.	舒伯特计数演算的严格基础	代数几何学	一个典型问题是：在三维空间中有四条直线，问有几条直线和这四条直线都相交？舒伯特给出了直观解法。希尔伯特则将问题一般化，并要求给以严格基础。经过许多数学家的努力，舒伯特演算基础的纯代数化处理已有可能，但舒伯特演算的合理性仍待解决。
16.	代数曲线和代数曲面的拓扑	曲线和曲面的拓扑学及常微方程定性理论	这问题分两部分。第一部分涉及代数曲线含有封闭分枝曲线的最大个数。第二部分涉及常微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$的极限环的最大数目和相对位置，其中$X$、$Y$是$x$、$y$的$n$次多项式。苏联数学家彼德罗夫斯基堪称$n=2$的极限环不超过三个。1979年，中国数学家史松龄和王明淑分别举出了四个极限环的反例。
17.	半正定形式的平方和表示	域论	一个实数n元多项式对一切数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都恒大于或等于零，是否能写成平方和的形式？1927年，已由阿丁解决。
18.	由全等多面体构造空间	结晶体群理论	问题由两部分组成。第一部分欧氏空间仅有有限个不同类的带基本区域的运动群。第二部分包括是否存在不是运动群的基本区域但经适当毗连可充满全空间的多面体？第一部分已由德国数学家比勃巴赫作出肯定的回答。第二部分，德国数学家莱因哈特作出部分解决。

续表

问题编号	问　题	推动发展的领　域	解决情况
19.	正则变分问题的解是否一定解析	椭圆型微分方程理论	这问题在下述意义下已获解决：1904年，苏联数学家伯恩斯坦证明了一个两个变元的、解析的非线性椭圆型方程，其解必定是解析的。这个结果，后来又被伯恩斯坦和彼德罗夫斯基等推广到多变元和椭圆组情形。
20.	一般边值问题	椭圆型微分方程理论	偏微方程边值问题的研究正处于方兴未艾，蓬勃发展阶段。
21.	具有给定单值群的线性微分方程的存在性证明	线性常微分方程大范围理论	此问题已在1905年希尔伯特、1957年勒尔及1970年比利时数学家德林的工作中，已得到解决。
22.	由自守函数构成的解析函数单值化	黎曼曲面理论	一个变数的情形，已于1907年由德国数学家克伯解决。其他方面尚未解决。
23.	变分方法的进一步发展	变分法	希尔伯特本人和其他数学家都作出了重要的贡献。20世纪变分法已有了很大的进展。

四 哥廷根——20世纪初数论研究的中心



科学生活犹如一片初出土的嫩叶，它比历史长河中许多其他的因素更为脆弱。科学的兴衰也象绘画和音乐一样，在很大程度上取决于短暂极不稳定的人的因素。伟大人物在科学发展中所起的作用是至关重要的。丰硕的研究成果往往也是围绕着这颗明星结晶而出。由克莱因领导和亲手创建的哥廷根大学数学团体是一个独一无二的科学中心。克莱因退休后，在希尔伯特的领导下再度表现出无限的活力和献身精神。20世纪初，全世界几乎所有数学专业的学生都受到这样的忠告：

“打起你的背包，到哥廷根去！”

4.1 哥廷根

哥廷根是德国的一座大学城。环绕城四周的是一片起伏平缓的丘陵，山岗上耸现着古代瞭望塔的剪影，红瓦屋顶的建筑把绿树成荫的哥廷根点缀得更为秀丽。古老的城墙至今还围绕着哥廷根的内城，每逢星期日午后，市民们总要去“游城”——这是一个小时左右的散步。城外座落着乔治·奥古斯特大学黄色的建筑物，大学创建人是汉诺威的选侯，他是英王乔治二世。城内，美观的、半木结构的住宅沿弯曲而狭长的 街 道 排列。两条大道，王子街和文德街，在数学家们称为“哥廷根坐标原点”的地方相会。城市中心，是市政厅。市政厅的底层的墙壁上，镌刻着一条箴言，它直言不讳地宣称：哥廷根外没有生活。

哥廷根是一座具有伟大科学传统的城市，它造就了象高斯这样的一位伟大数学家，哺育出象狄利克莱和黎曼这样杰出的现代数学大师，在18世纪和19世纪科学发展史上写下了光辉的一章。时至20世纪的开端，在克莱因和希尔伯特的领导下，哥廷根的科学传统不断得到发扬光大。在哥廷根这座数学家的摇篮里，培养了诺特、魏尔、西格

尔、兰道、柯朗等一大批数学大家。毫不夸张地说，20世纪的数学是从那里发展起来的。

20世纪初，有这样一段传闻：哥廷根城住的全是数学家。其不尽然，城里还住着其他人。但是，哥廷根的数学气氛非常浓厚。今天的数学家们还喜欢详细地讲述这样一个故事：一天闵可夫斯基在文德街上散步，发现一位青年人正在默想一个很重要的数学问题，他凑近拍拍年轻人的肩膀，告诉他“收敛是肯定的”，这位年轻人听后感激地笑了。

从1904年——1905年冬季学期开始，克莱因、希尔伯特、闵可夫斯基、龙格坚持每周星期四下午“准三点”的一次数学徒步。即使在这酷寒的冬天也不间断。荒凉的山丘、光秃秃的树干影响不了他们的乐趣，愉快的高谈笑语回荡于寒冷的空气中。他们共同讨论数学，探索数学的真谛，揭开科学的秘密。可以说：那时的哥廷根无处没有数学。

哥廷根的科学生活，对身临其境的人是难以忘怀的，在那些热爱数学而从世界各地汇集而来的年轻人眼里，哥廷根的生活似乎永远是如此美好。

4.2 数论研究的中心

20世纪初，由于希尔伯特和闵可夫斯基对数论特殊的偏爱，哥廷根一个新的研究数论的中心正在形成。令人遗憾的是：闵可夫斯基还未完成他的宏愿，一次没有诊断出来的阑尾炎使他丧失了生命。这无疑使哥廷根的数学团体，乃至世界数学的发展蒙受了重大损失。

闵可夫斯基去世后，该选择谁来接班？他的位置上有三位第一流的候选人——让今天的人们了解一下当时科学家们的那种认真负责的态度当然是很有趣的——这三位第一流的候选人是：兰道、赫维茨和皮隆。克莱因和希尔伯特主张要物色一位精力充沛的年轻人，一个还会大有作为的年轻人。那时，赫维茨已年过半百、身体有病，所以就把他排除在外。于是选择将在兰道和皮隆之间作出。他们的每一件工作都受到了仔细的审查，不是一个人，而是数学评议会里一大批很有才能的人来做这一工作，这是一场胜负各半的比赛。最后选中了兰道。而这一决定很明显是合情理的：皮隆与兰道比较起来，兰道并不那么讨人喜欢，也不会轻易被人驱使，而对这个团体来说，

不接纳唯唯诺诺、惟命是从的人是十分重要的。正象克莱因最后所说的那样："象我们这样的团体，最好有一位不是那么温厚宽容的人。"在闵可夫斯基去世后的那个春天，32岁的兰道来到哥廷根就任数学教授。

兰道的专长是用分析方法研究数论。还在柏林当讲师的时候，他已经证明了关于素理想在任意代数域中之分布的一个非常一般的定理，该定理相应于经典的素数定理。他在函数论方面做了重要的工作，他用一种完全出人意料的方法推广了皮卡的定理，以至他本人在最初都不相信自己是正确的，因而把发表论文的时间推迟了一年多。

在兰道到达哥廷根的同一年，他著的素数分布——解析数论领域内第一部书问世了。这本书中有一章，专门讨论在黎曼猜想成立的前提下，素数分布中许多问题所能得到的深刻结果。关于这部书，哈代曾经这样评价道："第一次使解析数论成为一门系统的科学，而不再是几个零散的漂亮定理的汇集。"它把"只有几位冒险英雄涉猎的天地"转变为数学研究的最富有成果的领域之一。

20世纪20年代，在兰道的不懈努力下，哥廷

根成为了数论研究的中心。甚有人认为："这是数论中一可与高斯在1801年开创时期相提并论的新时期的开端。"当时，最关心的问题有两个，一个是关于 ζ——函数零点的黎曼猜想；另一个是确切定出华林问题 n 次幂的个数；这是由哥廷根学派的领头人物希尔伯特1909年证明了华林定理而开拓的新方向。

兰道来到哥廷根后，有关他的故事不尽而来。有个学生向兰道请教玛瑙的质量——在德文里，玛瑙念作伯恩斯坦。兰道的回答一语双关，讲出了他对两位姓伯恩斯坦的数学家的评价。兰道看了玛瑙后，他说："菲力克斯"，然后再回答说："塞奇"，那就意味着这是一块上等货。其实，菲力克斯·伯恩斯坦和塞奇·伯恩斯坦都是非常出色的数学家。

兰道还是一位极端的抽象主义者，他写过一本关于微积分基础的有名的书，这本书是很值得赞赏的，但是作为学生课本就太荒唐了。他极端蔑视与应用有关的问题。有一次，现代空气动力学和流体力学体系的创建者伯莱特尔写了一篇关于脂肪和油类，长分子及它们在润滑的机械问题中的作用的文章。它是一项很重要的成果。当然你不小心会使机油弄脏你的裤子。兰道很注意这

点。不管怎样，只要涉及应用，他就会疾声呼道："啊！机油！"你看，出自兰道嘴里此岂不是对应用科学的一种嘲讽吗？

哥廷根的同事和学生们惧怕他的机智和铁面无私，不喜欢他的傲慢。但是，大家都佩服和尊敬他出奇的勤奋以及难以想象的献身于数学的忘我精神。兰道在哥廷根呆得很勉强，直到他邀请年轻的丹麦人玻尔到哥廷根一起搞研究。玻尔不是一般的数学家，他是1908年丹麦奥林匹克亚军队的成员，在未来的岁月里，他的名字与"殆周期"紧紧相连。

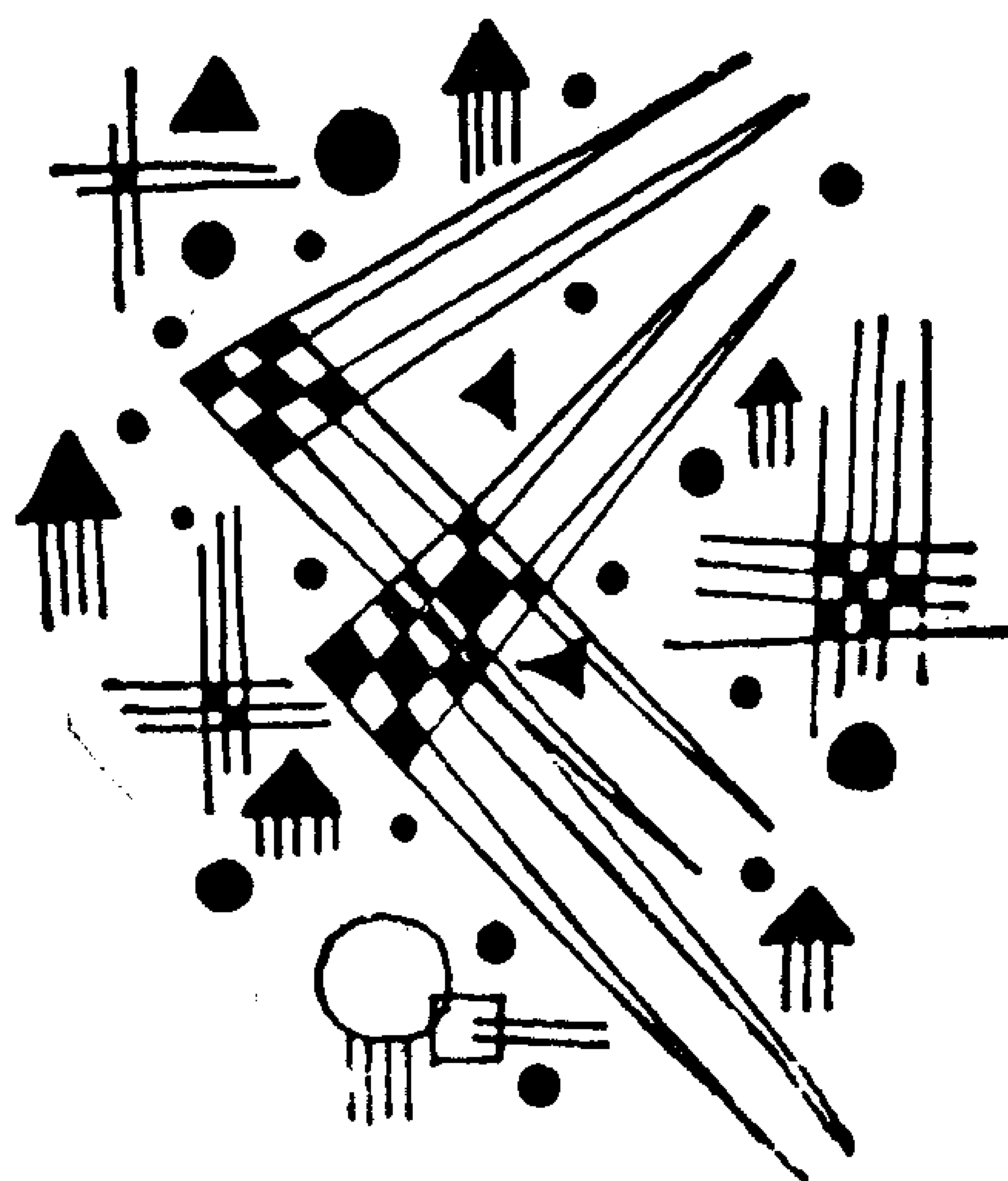
玻尔和哈代是哥廷根的常客，他们在往返丹麦或英国时常常互访。当哈代告别玻尔，横渡波涛汹涌的北海海峡回国时，他总是给玻尔寄一张明信片，宣称"我已经证明了黎曼猜想！"他以此告慰自己，因为黎曼猜想还没有解决，所以他也不会葬身海底。

就在这段时期，一位未来杰出的数论大家，这个领域中新一代闵可夫斯基——西格尔来到了哥廷根。他曾因拒服兵役而被关进了精神病院，而这精神病院仅与兰道父亲的诊所隔一墙。年轻的西格尔便有缘结识了这位哥廷根的大学教授。西格尔对兰道的印象与众不同，西格言简意深地

对别人说："要不是兰道，我恐怕早就命饮九泉了。"

西格尔在黎曼猜想的研究中，在许多方面都留下他的印记，其中给出赫克关于黎曼猜想定理的新证明，证明了西格尔定理等等。由于西格尔的到来，更加强大了哥廷根数论研究的阵容。当时世界上几乎所有著名的数论大师，都经常会聚在哥廷根，进行国际间的学术交流。在兰道的努力下，20世纪20年代一座世界数论中心在哥廷根诞生了。但不久又毁于纳粹之手。

五 杰出的数论专家—哈代



在众雄汇聚向黎曼猜想进军的队伍中，首推20世纪上半叶英国数学界的“泰斗”哈代的贡献最为杰出。1914年，他首次敲醒了沉睡了整整五十五年的黎曼猜想，开辟了研究“猜想”的新天地。他是现代数学史上的一位著名数学家。他那卓越、丰富的数学成果，和严谨治学、唯才是举的高尚品德，为后世广为传颂。

5.1 千里之行，起于始

1877年2月7日，在位于英国东南海岸的小城克立莱夫，诞生了一位英国近代数学史上的杰出人物——哈代。克立莱夫是座风景如画，气候宜人的城市，城中有一所以它的名字命名的学校。哈代的父亲伊萨克·哈代正是在这所学校里任

教。母亲索菲亚·霍尔是城内林肯职业大学附中的督导。哈代出身于这样一个书香门第，从小就受到了良好的教育。

俗话说："一丝而累，以至于寸，累寸不已，遂成丈匹。"孩提时的哈代对数就非常敏感。两岁时，哈代能数到百万，三岁的哈代，却已经能够写下一到一百万之间的任何一个阿拉伯数。一颗小树要使它迅速成材，需要园艺师别具匠心地精心栽培，哈代的父亲正是这样一位"园艺师"。当哈代刚满五岁，他的父亲为使他从小能独立自主地生活，一反当地的惯例，没有聘请家庭教师，把他送进了城内的维多利亚幼儿园。哈代的智商大大地超过了他的同龄人。据说：哈代在小学、中学都是跳级生。更令人震惊的是，哈代在读小学时候靠自学完成了一本有百页的英国王朝编年史稿。在数学上，哈代的天赋更为出众。十三岁时，哈代就获得奖学金进入一座培养著名数学家的摇篮——温切斯特学院。十九岁的哈代参加了剑桥大学三一学院的奖学金会考，他在这次会考中成绩优异，并且如愿以偿。二十岁的哈代通过了剑桥大学三一学院的入学考试。开始他的数学研究生涯。

19世纪末，剑桥大学的教师队伍，群雄掘

起，人才济济一堂。在数学方面有：怀特黑德、穆尔、威特根斯坦、洛夫等知名学者。对哈代产生影响最大者是应用数学专家洛夫。哈代成为一位有名望的数学家之后，曾写过一本题为《一个数学家的回忆》的书，书中倾吐了他对他的恩师的敬仰之情。

记得黎巴嫩的大文学家凯罗·纪伯伦曾这样说过："假如他真是大智，他就不命进入他的智慧之堂，却要引你到你自己的心灵门口"。洛夫的确是一位大智者。他在辅导哈代时，对哈代进行了全面的、细致的观察，觉得哈代的学业基础扎实，为哈代选定了约当的名著法文本《分析教程》为教材。在当时，此书可谓是分析数学方面的权威著作，也是一本深奥且不易为人掌握的巨著。但是哈代以其深厚的数学功底和杰出的数学才能，在洛夫教授的指导下循序渐进。

光阴似流水。1900年，哈代结束了在剑桥大学三一学院的大学生活。此时年仅24岁的哈代，在英国著名的数学杂志《数学信使》上发表了他的第一篇论文——《某些定积分的估值》。此后他对这个问题产生了偏爱。围绕这方面问题作了周密、系统、详尽的科学探索，直到他生命的最后几年里，他仍孜孜不倦地撰写着这方面的论

文，总想把他的研究成果推进到更高的水平。他的这些研究，也为他后来进军“黎曼猜想”打下了扎实的基础。

为了激励学生奋发学习，英国的各大学都设有奖学金制度，凡是有才华的学生，只要在学业上显示出优异才能，均能报名申请各种类型的奖学金。奖学金的获得者意味着他的才华出众，所以即便是富家子弟也绝不会放弃这特殊机遇。

哈代在大学毕业后，为了能申请得到“特待校友奖学金”，就开始着手准备论文。这种奖学金是剑桥大学特为该校毕业生和在校教师而设立的。评选的过程是：每年举行一次论文比赛，参加比赛者必须在每年8月底前交稿，论文的题目可以自定，然后有指导教师和有关评审机构共同研究，筛选出有独特见解或新成就的论文。论文的评议是非常严格的，可谓万里挑一。一旦入选，就可以享受为期六年的“特待校友奖学金”。标志着获得者在学业上已进入了新的较高阶段。

哈代的聪明才智，早为怀特黑德教授所赏识。怀特黑德是剑桥大学深孚众望的数学家，他非常重视发掘人才，一旦为他所选中，就亲自指导和培养。他看了哈代所撰写的论文后，心情异常激动，亲自为哈代的这篇论文写上评语，并郑

重地向评审委员会推荐．就这样，哈代 获 得 了1900年度的“特待校友奖学金”．

获得奖学金，这意味着哈代能继续在这所著名的大学里深造．1901年，哈代和琼斯共同获得了一年一度的数学大奖——史密斯奖．

1906年，哈代的“特待校友奖学金”期限已满．由于他年轻有为、积极上进，他的才华引起越来越多人的重视，校方决定让他留校任教．

哈代的另一个杰出的工作是关于生物遗传学的．大家知道，生物的微细变异往往是进化的原始材料，可供自然选择之用．但人们担心新生的变异经过几个世代后会减弱甚至消失． 哈 代 于1908年一举攻克了遗传学中提出的数学问题，证明了在不受外界影响的条件下一种群的基因频率世代不变.现在人们称它为哈代——温伯格法则．剑桥大学的师生开始知道这位年轻的 教 师 是 位出类拔萃的数学奇才，校方也倍加关心哈代的成长．

年轻的哈代在数学的研究中取得了 重 要 成就，荣誉、赞扬接踵而来．但是，他并不满足于现状，他翱翔在数学王国的宇宙之间，探索着其中的奥秘和真谛．同时人们期待着他在数学方面取得更加辉煌的成就．

5.2 向黎曼猜想进军

> 青春是美丽的，她能迸发智慧的火花；
> 青春是值得赞美的，她能结出丰硕的果实。

青春时代的哈代，犹如蓓蕾初放的花朵，朝气蓬勃。尽管哈代在数学领域有着杰出的成就，以及接踵而来的荣誉。然而他仅仅把它作为科学生涯的起始点。任重而道远，在数学王国中，还有那么多的高峰等待着他自己去攀登。

“少年心事当拿云，谁念幽寒坐呜呃。”哈代经过反复思索，决心选择难度极大的黎曼猜想作为他的进军目标。所以选择这座堡垒，一是因为这是众多一流数学家屡攻不克的一道难题，是一块磨砺人类智慧的试金石。二是因为哈代有股初生之犊不怕虎的牛劲，别人越是认为难攻克的，他越有兴趣，而且有一股楔而不舍的钉子精神。

尽管许多关心哈代成长的学者，教授们焦虑地关心着他的下一个进军目标，但他闭口不谈，把他的全身心倾注于收集这方面的资料，总结前人在这方面的工作，权衡同代人所达到的研究水

平．知己知彼，把自己置立于不败之地。

“两人同心，其利断金”．哈代还想找一位同盟军，他思忖、筹划，最后他决定把自己所收集到的有关情况告诉他的同事李特伍德，征求他的意见，并希望他能共同向这座难以攻克的堡垒进军．哈代执笔写下了长长的一封信，信中叙述了数论的发展历史和现状，以及他们所面临的困难和下一步设想……等等．共同的事业把两颗心结合在一起，开始了数学史上传为佳话的真诚的友谊．

研究整数性质及整数与整数之间关系，可以说已有几千年的历史．作为数学最古老的两个分支：数论和几何，后者中的欧几里得几何作为一门科学来研究已经枯竭，已成为一位“柱杖老人”．然而前者却存在着大量的问题，有着无穷的生命力．欧几里得证明了素数有无穷多个，这是两千年间唯一的关于素数的定理．1859年，德国科学院院士黎曼在题为《论小于给定数的素数个数》中提出了数学上空前重要的六个猜想．沿着黎曼留下的足迹，后人证明了数论中最著名的猜想之一——素数定理．论文发表三十年后，六个猜想中的其中五个逐渐得到了完美的解决．剩下的一个就是数学中的“超级难题”——黎曼猜想．

回顾对黎曼猜想的研究，最关键的一步是哈代给出的．他在1914年证明了黎曼ζ函数方程：

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots=0$$

（其中$s=\sigma+ti$，$i=\sqrt{-1}$）的无穷多个解位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$上．

尽管这一结果没有完全解决黎曼猜想，但无疑是对黎曼猜想研究的首次重大突破．它使得哈代在“黎曼猜想”的研究中，处于遥遥领先的地位．

数论犹如广阔无垠的大海，人们可以在此中尽情地畅游，锻炼出征服大自然的坚强意志．当人们着意于去解决这些数论难题时，会闪发出智慧的光芒，会创造出种种新的数学方法，产生新的数学思想，甚至会产生新的数学分支，为人类征服自然改造自然提供有力的工具．赢得了“数之女皇”的美誉．因此，数论的研究，特别是黎曼猜想的研究，引起了一大批第一流数学家的注意．

仿效哈代的方法，1942年来自大数学家阿贝尔的故乡的挪威青年数学家赛尔贝格成功地证明了函数方程$\zeta(s)=0$ 至少有百分之一个非无聊零

点位于直线$\sigma=\frac{1}{2}$上。1974年美国麻省理工学院的数学家莱文森把上述的百分之一提高到$\frac{1}{3}$。哈代的成就轰动了整个数学界。

有许多事实支持着猜想的正确性，例如1968年美国威斯康辛大学的三位数学家罗舍、舍恩菲尔德和约埃，在对黎曼猜想的研究中，首次运用了现代计算工具——电子计算机，证实了黎曼ζ函数方程的前三百五十万个解位于实部$\sigma=\frac{1}{2}$的直线上。当然，这些事实并不能填补有限与无限这条鸿沟，因为所考察的仅仅是其中的有限个。数学史中不乏例证，说明有限推理的不可靠性。例如1914年李特伍德甚研究过一素数分布密度的不等式。这个不等式从1到相当于宇宙中原子数量那么大的数都是正确的，但超过某个大数的无穷多个数却是错误的。黎曼猜想至今没有解决，但数学家们对此仍然抱以极大的热情，持乐观态度。我们也深信：猜想被解决的日子一定会到来。

5.3 真诚的友谊，诚挚的合作

哈代说过，他一生最愉快的两件事是和李特

伍德合作以及发现了拉玛努扬。

自1911年开始，哈代和李特伍德共写了 100 多篇论文。李特伍德比哈代小8岁。哈代后来到牛津任教，李特伍德在剑桥，但仍然保持合作。他们每接到对方的来信中提出的论文，都必须不看信中的证明，而要自己单独做，这样经过互切互磋，最后由哈代定稿。真诚的友谊，共同的事业把他们紧紧地连接在一起。他们的合作范围很广，涉猎了数论、黎曼ζ函数、不等式、陶伯型定理、丢番图逼近、三角级数及发散级数等领域。为现代数学的发展作出了杰出贡献。哈代与李特伍德间的友谊，已成为现代数学史上的一段佳话。

1913年新年伊始，一天哈代从信箱内收到一封沉甸甸的大信封引起了他的注意。这是一封发自异邦印度的信件，在那里他并没有熟人。然而信封上却工整地写着：英国剑桥大学三一学院哈代教授收的字样。哈代觉得非常奇怪。他小心翼翼地用刀割开信封，打开一看，竟是一篇数学论文，还附有一封信。原来这是天才数学家拉玛努扬写给哈代的。

拉玛努扬于1887年出生于印度的马德拉省，家境颇为穷困。据人们回忆，他从小对数字就有特

殊的运算能力和记忆能力，比如可以背出 π、e的许多位小数。1903年，他从友人那里借到一本卡尔著的《纯粹数学纲要》。他废寝忘食地学习，从此，数学成为他的唯一兴趣。1904年他获得了奖学金，但因英语不好而辍学。1909年他结了婚，终日为生活奔波。

天才面前免不了有障碍，而障碍却能磨炼天才的意志。生活飘泊不定的拉玛努扬一直没有放弃数学研究。1911年，他在印度数学会杂志上发表了第一篇论文《关于伯努利数的性质》，此后又写了一些论文，渐渐为人所知。人们可坚信这样一条真理：是木，它总会长成材的。

在朋友的怂恿下，拉玛努扬才给哈代写了这封信。就是这封信在他的生活中产生了重大的转折。信中介绍了他自己的身份后这样写道：

"最近我读了你的一篇文章，是关于无限大的界。在36页上，我发现了迄今没有一个确定的表达式能给出不大于一个给定常数的素数个数。我找到了一个公式非常接近于真实结果，误差可忽略。我恳请您能过目附上的论文。如果您相信有价值，我希望我的结果能够发表……"。

哈代看完信后，他心中思忖着，来自科学落后之邦印度的一位数学爱好者的论文，是否有一

定的价值？他本着唯才是举之心，开始阅读拉玛努扬的论文。其实拉玛努扬附上的论文仅仅是些没有证明或只作直观推断的式子。

哈代一会儿放下稿子，低头沉思；一会儿又一页页地往下细读；有时候又重新翻到前面，再仔细地回味，好不容易把稿子看完。他看了这些式子后感到十分吃惊。尽管文中有不少错误，如随便把运算符号交换等等。但其中的大部分结果是正确的，其中一条是兰道刚得到的结果，另外一些是当时数学家所企求得到的结果。哈代认为他很少见到这样高水平的论文。

以后一段时间里，哈代不顾连日的劳顿，沉浸于论文的修改之中。这篇有名的论文后来发表在《伦敦数学汇刊》上，而原稿中的一段文字则成了《一位数学家的回顾》的封面。这篇论文证明了非限制分折数 $p(n)$ 不仅能近似地表示成一渐近公式，而且还能对任何n精确地计算出来。文中所用的“圆法”无疑是哈代和拉玛努扬的最伟大创造。后来哈代和李特伍德把圆法应用于其他问题，特别是应用于把一个整数表示为若个给定幂之和的华林问题，以及著名的哥德巴赫猜想。苏联数学家维诺格拉多夫运用圆法的基本思想，结合自己的创新，证明了奇数哥德巴赫猜想（即

三素数定理）．数学家们认为这是一个非凡的方法，今天仍然发挥着重大的作用．鉴于拉玛努扬的杰出工作，哈代在给他的信中对他的才华给以高度的评价，对他的工作推崇备至，并热情地邀请拉玛努扬到剑桥与他一起从事研究工作．

拉玛努扬怎么能想到自己的论文会引起哈代如此强烈的反响，他内心深处的激动是难以用语言来描述的，他庆幸自己遇到了一位识才的良师．到英国去学习和工作，对妻儿老小，全靠拉玛努扬一人挣钱活命的家庭来说正是困难重重．1914年4月，在哈代的支助下，拉玛努扬说服了母亲，来到了三一学院．

哈代把拉玛努扬安置在自己家里，他们同吃、同住、同研究．哈代仔细观察了拉玛努扬的工作，发现他的知识的局限和知识的深刻是同样地令人惊奇．一方面，拉玛努扬可独立地发现 ζ 函数的性质，研究解析函数的尖端问题，另一方面对复变量函数却只有一个模糊的认识．他似乎不知道严格推理是什么，只是得心应手地交替使用论证、直观和归纳．同时发现这位印度青年才华过人，是位有前途的数学家．哈代对他进行了适当的教育，结果很成功．拉玛努扬在欧洲共发表了21篇论文，17篇注记．他的文章大都登在伦

敦的数学刊物、法国科学院的杂志及德国的《数学杂志》上。

1918年，拉玛努扬被选为英国皇家学会会员。但是，这位才华横溢、聪明过人的数学家不幸患了肺病。由于英国潮湿的气候不利于他的养病，他不得不离开了生活了五年的英国，返回印度。翌年，这位年仅33岁的天才数学家离开了人世。

对于拉玛努扬的死，哈代悲痛万分。无形的数学纽带早已把他们俩连在一起。哈代在拉玛努扬死后，总感到无法驱散笼罩在自己心头的阴霾。他以后多次写文章悼念这位青年。他这样写道："拉玛努扬的思想方法不属于当代数学家的流派，但他知道什么时候证明了一个定理以及什么时候没有证明。他那种原发的巧妙想法源源不断地流出。对于欧洲来说，正因为他代表着不同的流派，因而更加重要。"

诚然，拉玛努扬有许多非凡的数学才能。关于他，有种种传说。据说，有一次哈代到医院探望拉玛努扬，告诉他坐的汽车号码是1729，拉玛努扬不假思索地指出：这个数字很有趣，因为它是能用两种方法表示为的最小整数的立方和，即：$1^3+12^3=1729=9^3+10^3$。这一传说并非一定可

靠，但确实也反映了拉玛努扬的数学创造风格：凭直觉作出应有的正确论证。

值得一提的是，拉玛努扬为后人留下了许多猜想，最为著名的拉玛努扬猜想与代数域上的黎曼猜想——魏依猜想密切相关。1974年，比利时青年数学家德林在解决魏依猜想时也引用了拉玛努扬的许多有用工作。

哈代喜欢同别人合作搞研究，许多数学家也都愿意与他合作，包括他的学生在内。与哈代合作过的人很多，除了上面提到的李特伍德和拉玛努扬外，还有英厄姆、兰道、波利亚、梯其玛什等著名数学家。哈代常常说："论文的每个合作者应该得到此论文的不止一半的荣誉"。他总是避而不谈自己所作的工作。他认为"自己只是一个问题的解答者，没有引进任何新观点"。然而，哈代在解析数论方面对黎曼猜想的研究所作的贡献是举世公认的。外貌只能炫耀一时，真美方能百世不殒。哈代那种甘为人梯、识才爱才、谦虚谨慎的美德，将永世流芳。

5.4 咬定青山不放松

在科学的道路上没有平坦的大道。然而，生

活的道路也不是平坦的。哈代在剑桥学习和工作期间，几乎把他的所有精力都扑在教学和科学研究上。虽说剑桥离他的故里并不怎么远，但他一直没能抽出时间回家探望父母，与他们共享天伦之乐。他的父母也从不埋怨。相反地，哈代的父母坚决支持他搞事业。哈代也以自己的出色工作报答父母的养育之恩。当哈代在学术上取得成就的时候，接踵而至的问题是年纪大了，该成立家庭了。他的父母双亲年事已高，心中牵挂着儿子的婚姻问题。二老当然少不了操心，有许多名门望族也托媒前来，欲结姻亲。起初，哈代一笑了之，但接二连三的纠缠，扰得他心神不安。成家与立业，两者该怎样选择，在人生的十字路口，哈代断然选择了事业，既爱科学须痴情，哈代以他那美妙动听的话“我的一生已经献给了科学”，回答了媒人。他与科学结成了“终身伴侣”。为了使他的科学研究不受干扰，他的家里所雇佣的仆人都是男的。

俗话说：“俭能养志”。哈代是很节俭的人，他并不注意物质的享受。他的学生曾回忆道：“……为了唯理智的苦行主义而放弃生活上的奢侈享受，这确实需要勇气”。哈代把自己的物质欲压低到最小的限度。与他共事过的人都知

道，哈代是个非常珍惜时间的人．他最讨厌镜子把宝贵的时间花在无谓的装扮上．他的房间里没有镜子．在旅馆里，他进房所做的第一件事就是用浴巾盖住镜子．正因为如此他把自己置于无拘无束的环境中．时间如同一位伟大的画家，她能描绘出未来的美景．哈代惜阴重金，为他的事业上的成功，赢得了宝贵的时间．

但是请不要误为哈代是一个生性怪癖的奇人．其实，他爱好运动、为人诚实、谈吐风趣、富有正义感．在剑桥大学三一学院念书时，他是一个很好的板球运动员．他不信上帝，信科学，拒绝参加任何宗教活动．1940年元旦，他在给好友的一封信中提出了六点新年希望：（1）证明黎曼猜想．（2）在欧弗尔举行的最后一场板球比赛，并在第四局中获得211分以赢得胜利．（3）找到公众所信服的不存在上帝的论证．（4）第一次登上珠穆朗玛峰．（5）在英国和德国等国宣布民选的总统．（6）处死墨索里尼（意大利法西斯党魁）．哈代的性格和志向可见一斑．社会发展到今天，哈代所提的后面五点希望都已成为现实．而黎曼猜想仍然是一个没有被揭开的迷．

5.5 数学领域中的佼佼者

从1911年开始，哈代接受前人的挑战，研究黎曼猜想。1914年，他终于找到了一条大有希望的线索，使黎曼猜想的研究出现了重大的突破，哈代仅这一成果就可永垂数学史册。“老骥伏枥，志在千里”。1940年，年近花甲的哈代仍忘不了黎曼猜想，把他作为自己在新年里的第一点希望。他致力于研究猜想，把他的一生贡献给了数学。此外，哈代是数学界中具有丰富组织能力的领导者。

《数学季刊》和《数学信使》是国际上颇有影响的刊物，原来由格莱谢尔任主编。但1928年格莱谢尔逝世后，一度停刊，这使数学界蒙受了巨大的损失。数学界同行纷纷要求迅速恢复这两个刊物，这需要在数学界内物色一位众望所归的人物来接任主编的工作。在数学界的竭力推荐下，哈代接替了这项工作。由于他的积极努力，新的《数学季刊》不久就问世了。而且办得非常出色，成了国际上著名的数学杂志。

英国伦敦数学会在哈代的影响下，学术气氛空前活跃。教授和学生在自由、和谐的气氛中，

共同讨论一些深刻的数学问题。1931年英国剑桥大学的领袖数学家霍布森去世。一个国家不能没有首脑，一个团体不能缺少核心数。数学界也正为此着急。当时，哈代在国外，同行们普遍认为哈代是最合适的继承者。哈代重返剑桥大学，直至1942年退休。在这段时间里，值得一提的是举办"哈代——李特伍德"讨论班。讨论班是在哈代的主持下进行的，他处理问题的方法灵活多样，而且涉及问题的本质。在这个讨论班的影响下，英国数学界培养出了象达文泡特等一大批数论专家，即使在今天，剑桥大学仍然保持着数论研究的特色。我国已故的杰出数学家华罗庚也曾在哈代的指导下工作过，他在数学的许多领域都作出过重要的贡献。

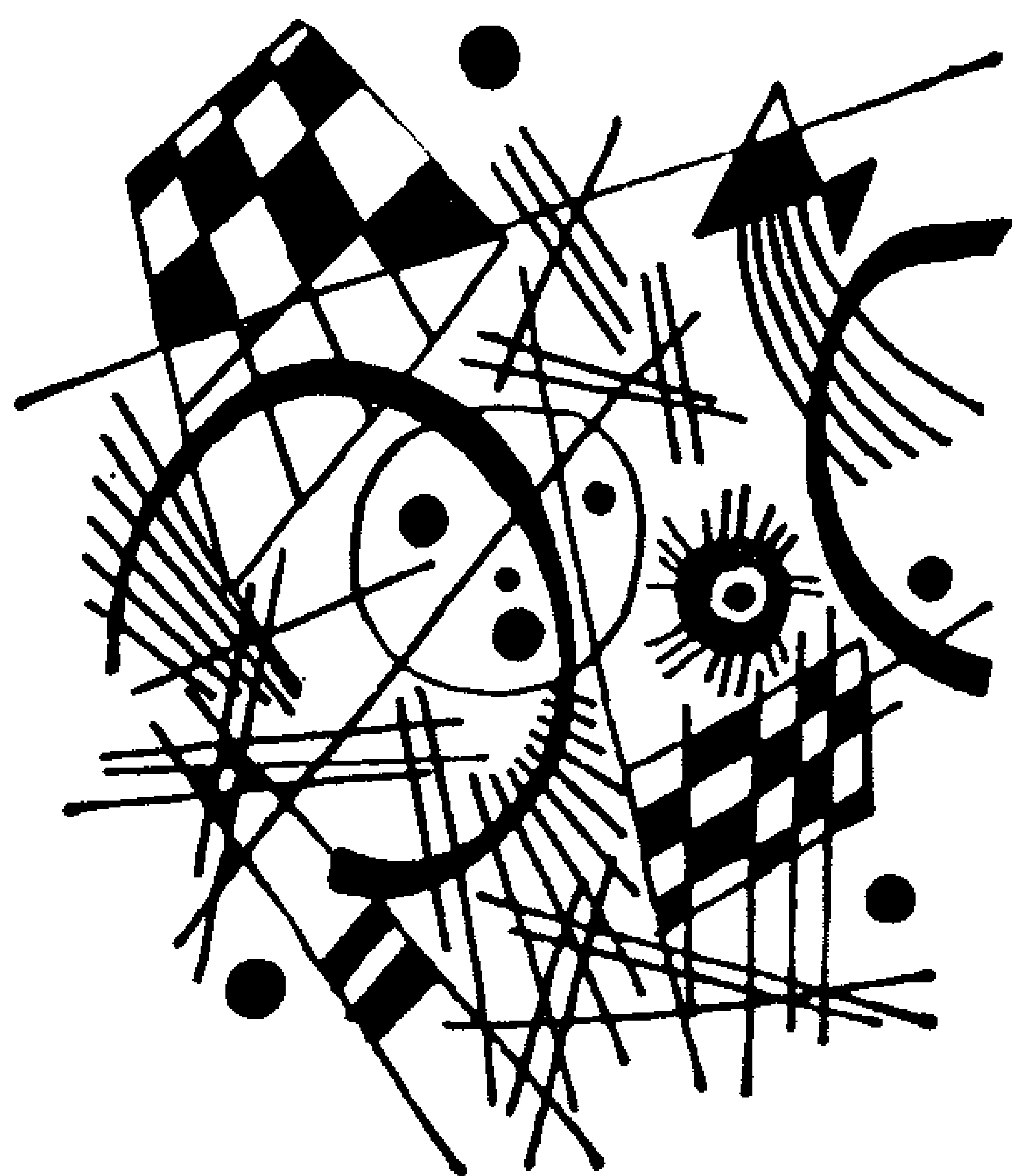
哈代在事业上取得了巨大的成功，得到了国际科学界的公认，赢得了荣誉。年仅四十多岁的哈代，就曾三次应邀出国访问讲学。每当出国或返回国内的时候，他每次都要给他的一些朋友寄一张明片，声称"我已经证明了黎曼猜想"。据哈代本人说，他所以这样做，是因为阎王同他有个人的冲突，不愿意让他带着这样的荣誉去见他。

1920年，哈代被授予皇家学会的皇家奖章。

在1922年赫尔会议上，哈代被选为不列颠协会A组的主席．1924年至1926年他担任国家科学家协会主席，并成为许多著名的国家科学院的名誉成员．1940年他获得了西尔凡斯特奖章．1947年又获得了考不勒奖章．在哈代逝世的前几个月，他被选为巴黎科学院的外籍院士，这是一个特殊的荣誉，因为这样席位只设十个，只有举世公认的杰出科学家才能获得一席．

不可否认，20世纪以来英国数学，总的说来较欧洲大陆的德国和法国稍为逊色．哈代在数学史上的地位，也逊色于同时代的数学大师希尔伯特．但是，他对数学中的最重要问题之一黎曼猜想所作的贡献是无与伦比的．作为20世纪上半叶英国数学的代表，哈代也是当之无愧的．

六 菲尔茨奖获得者——赛尔贝格，朋比利，德林



每年一度的诺贝尔奖，已经成为家喻户晓令世人瞩目的科学大奖。但令人失望的是诺贝尔奖在科学方面只设物理、化学、生物学和医学奖，表彰在这几门学科中取得卓越成就的精英，唯独缺少数学奖，使数学界失去了一次评价重大成就和杰出人才的机会。至于诺贝尔奖中为什么不设数学奖，对此人们一直有各种猜疑。

由加拿大数学家命名的菲尔茨奖也是一种世界性的奖励，每四年颁发一次。在各国数学家眼里，获得菲尔茨奖的荣誉可与诺贝尔奖媲美。然而，菲尔茨奖只是一枚金质奖章，与诺贝尔奖的十万美金相比微乎甚微。值得庆幸的是世界上没有一种大奖比菲尔茨奖更具权威性和国际性。菲尔茨奖获得者工作代表着当今数学发展的主流。

本章将向大家介绍菲尔茨奖获得者 赛 尔 贝

格、朋比利和德林的获奖工作．这些工作都与至今尚未解决的著名问题——黎曼猜想有着密切的关系。

6.1 阿特尔·赛尔贝格

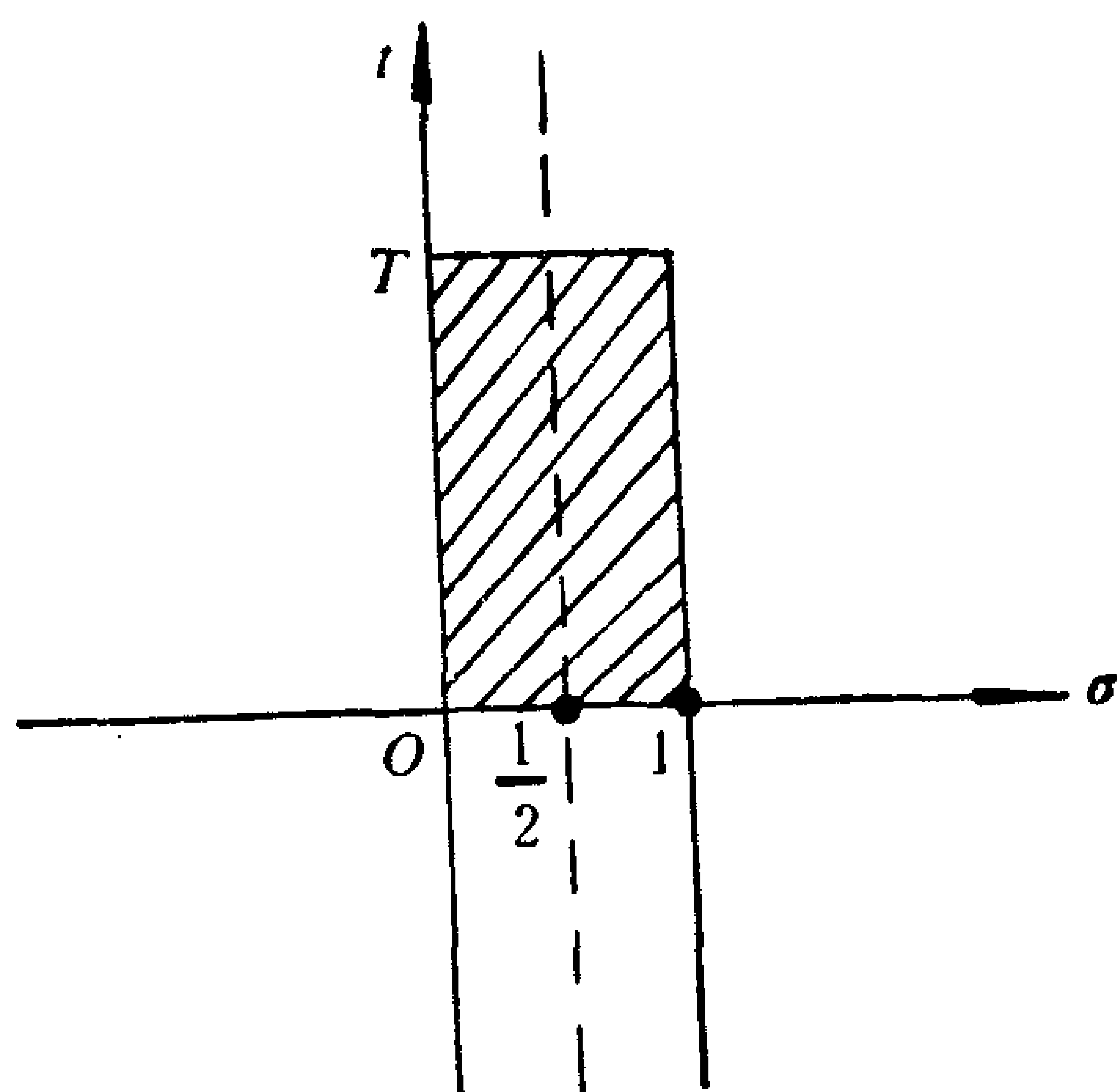
在菲尔茨奖获得者中，直接以研究黎曼猜想为获奖主要工作的唯独只有赛尔贝格．赛尔贝格是一位挪威血统的美国数学家．1917年 6 月 4 日，他生于挪威的朗根松．赛尔贝格的全部教育都是在挪威国内接收的．19世纪的 挪 威， 是 一个产生象阿贝尔这样伟大数学家的国度．数学教育的水准颇高．赛尔贝格在挪威首都奥斯陆大学上大学，以后又留下作研究生．1943年，他获得了博士学位，学位论文的题目为《论黎曼 ζ函数的零点》．这是一篇继哈代后开创黎曼猜想研究新领域的杰出文献．这篇论文使赛尔贝格崭露头角，其声誉传遍四方．今天，每当人们念叨求证黎曼猜想这一难题的漫长历史时，都忘不了这一研究成果。

1859年，黎曼发现 ζ函数与素数有密切的联系，提出了一篇八页的论文《论小于给定数的素数个数》，其中包含着好儿个猜想．最著名的、

也是迄今无法解决一个就是黎曼猜想．所谓的 ζ 函数，就是 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}(s=\sigma+it)$．最初，这函数被大数学家欧拉用来解决素数分布问题．然而，当前 ζ 函数的根本问题是黎曼猜想．即一个关于 $\zeta(s)$ 的零点分布的猜测．在希尔伯特演讲的二十三个问题中，这个猜想被列在第八个问题中，而第八个问题的核心就是这个猜想．从1859年算起，已迈过了一百多年的历程，黎曼猜想仍然是一个难解之“迷”．

正确解决难题的方法是相似的．当人们无力于一揽子加以解决时，就只能避开障碍，解决较弱的命题．赛尔贝格正是这样，开辟了进军黎曼猜想的新途径．比较 $N(T)$ 和 $N_0(T)$，这里的 $N(T)$ 是矩形 $\{0<t<T,\ 0\leqslant\sigma<1\}$ 中 $\zeta(s)$ 的零点个数，$N_0(T)$ 是线段 $\left\{0<t<T,\ \sigma=\frac{1}{2}\right\}$ 上 $\zeta(s)$ 的零点个数．黎曼猜想无非是想证实：对于任意 $T>0$，有 $N(T)=N_0(T)$．由于上述线段是矩形集合中的一部分，显然有 $N_0(T)\leqslant N(T)$．于是黎曼猜想实质上等价于证明：$N_0(T)\geqslant cN(T)$，$(c=1)$．

赛尔贝格的博士论文，在这一方面迈出了重



要的一步．在此之前，哈代首先证明了 $N_0(T) \longrightarrow \infty$（当$T \longrightarrow \infty$时），即$\zeta(s)$的无穷多个零落在 $\sigma = \frac{1}{2}$的直线上．随后，哈代又与李特伍德合作证明了：$N_0(T) \geqslant AT$，此处A为常数．可以毫不含糊地推测，赛尔贝格所用技巧是哈代技巧的进一步发展．实际上，赛尔贝格证明了：存在一个常数A，使得$N_0(T) \geqslant AT\log T$．关于$N(T)$有这样一个估计式

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + S(T) + \frac{7}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

其中$S(T)=\frac{1}{\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)$，$S(T)$的统计分布已被赛尔贝格所确定，但是$S(T)$的最大阶仍然是个未知数．一般认为：

$$S(T)=O\left(\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{1/2}\right)$$

因此，赛尔贝格的博士论文的主要结果相当于证明了：$N_0(T)\geqslant cN(T)$．尽管赛尔贝格没有计算出c的大小，事实上用他的方法计算得到的c只有百分之一左右．显然此结果离黎曼猜想$c=1$相距很远．但他的成果毕竟是开拓性的，被确定为获奖的主要工作之一．

由于上述成果，赛尔贝格名扬海外．生活中的一切都受到美好的抚爱．1947年，赛尔贝格完婚后，应邀赴美国的普林斯敦高等研究院工作，并定居美国．1951年他成为普林斯敦高等研究院的教授．普林斯敦高等研究院是美国也是世界上的一个著名的科学研究中心．那里拥有爱因斯坦这样伟大的物理学家和外尔、诺特、冯·诺依曼这样杰出的数学大师，无疑给赛尔贝格创造了极好的环境，使他在许多方面做出了出色的结果．导致他获得菲尔茨奖的另一有趣工作就是在这期间完成的．他在1949年给出了素数定理的初等证

明。

勒让德和高斯曾经根据大量的具体数字材料猜测到，若$\pi(x)$记为不超过自然数x的素数个数，则当$x \longrightarrow \infty$时，$\pi(x)$与$\frac{x}{\log x}$很接近．即

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x)/x/\log x = 1$$

这就是所谓的“素数定理”．人们会惊奇地发现分布毫无规则的素数列，其个数竟然与 $x/\log x$ 同阶．细心的读者不难发现 $\pi(x)$ 的近似数与生长和繁殖增长率$\log x$有密切的联系．素数定理提出近一百年后，法国数学家阿达玛和布桑分别独立地给出用到 ζ函数性质的解析方法的证明．其思想渊源可追溯到黎曼的那篇关于黎曼猜想的论文．此后，美国数学家家维纳又给出了一个方法，但不是完全初等的新证明．由于研究素数定理的道路是那么的漫长和艰难，因此，不少数学家怀疑这个定理最终可以用初等方法证明．例如，英国解析数论大师哈代一次在哥本哈根数学会发表演讲时曾指出：虽然“断言一个定理肯定不能用某种方法证明是轻率的”，但是素数定理的初等证明照他看来格外的不能．“如果谁给出了素数定理的初等证明，那他就证明了我们现在关于数论、解析函数论中何谓深刻、何谓肤浅的见

解是错误的……，从而到了该丢掉一些著作并重写理论的时候了”。

时至说了这句话后的第二十八年，天才人物赛尔贝格和匈牙利年轻的数学家爱多士差不多同时用初等方法独立地证明了素数定理。他们两人的证明都依赖于同一不等式——赛尔贝格不等式，其意义远远超过了这一初等的证明。

1950年，战后的第一次国际数学家大会在美国的坎布里奇举行。鉴于赛尔贝格在黎曼猜想研究和素数定理的初等证明两项杰出成果，赛尔贝格与另一位“广义函数论”创导者法国数学家许瓦兹荣膺战后第一届菲尔茨奖。

得奖以后，赛尔贝格的研究兴趣更为广泛。1952年，他对布隆筛法作出了重要改进，克服了布隆筛法中组合过于复杂、上下界过于宽泛的缺点。1956年，他写出了《弱对称黎曼空间中的调和分析和不连续群及其对于狄利克莱级数的应用》的论文，开拓了一个新的研究方向。从60年代起，他的研究兴趣转向连续群的离散子群，为后人留下了著名的赛尔贝格猜想。

在菲尔茨奖的早期获得者中，活跃于数学界时间较长的就要数赛尔贝格。他在本世纪数学史册上，将留下许多以他命名的数学词汇：赛尔贝

格不等式、赛尔贝格等式、赛尔贝格渐近公式、赛尔贝格筛法、赛尔贝格ζ函数、赛尔贝格猜想等等。赛尔贝格的研究成果无疑推动了数学的发展，特别是数论研究的发展。

6.2 恩立考·朋比利

意大利的现代数学事业非常发达，涌现出了象贝尔切密等一大批优秀数学家，以及贝蒂尼、舍格雷、查雷斯基等一大批杰出的几何学家。在菲尔茨奖得奖者中，朋比利却是至今唯一的意大利人。他犹如鲜花丛中的一朵奇葩，灿烂夺目。

朋比利获奖的最重要工作是证明朋比利中值定理。时间可追溯到1963年和1964年，那时朋比利在英国剑桥大学跟随数论大师达文泡特工作。1965年，达文泡特应邀访问米兰。达文泡特接受意大利之行的本意是：与朋比利合作，对素数分布问题作更深入的研究。一开始工作，他们就发现他们的工作需要许多关于算术级数中素数分布的信息。达文泡特告诉朋比利：他的学生罗斯最近对大筛法的改进，可以解决眼前的问题，只是形式上还不能直接用上去。并建议朋比利是否能从大筛法着手解决当前的素数分布问题。说完，

达文泡特就到意大利的古都佛罗伦萨和水上城市威尼斯度假，沉浸在风光旖旎的大自然的怀抱之中。四天以后，当他回到米兰，在车站遇到了接他的、两眼充满血丝的朋比利。朋比利急不可待地告诉他：我搞出来了，我成功了！这一成果就是1965年朋比利发表在著名的英国数学杂志《数学》上的论文《论大筛法》。这篇文章震撼了整个数学王国。

众所周知，在希尔伯特二十三个问题中，第八个问题是关于数论的一些猜想，其中包括黎曼猜想和哥德巴赫猜想、孪生素数猜想。1944年由林尼克首创的大筛法就是用来解决后两个猜想提出的有效方法。朋比利对大筛法的改进，无疑是给进军象哥德巴赫、孪生素数猜想这样的世界级数学难题提供了一件精锐武器。

希尔伯特曾预言：解决黎曼猜想之后，才有希望解决哥德巴赫猜想和孪生素数猜想。而朋比利工作的出色之处就在于绕过黎曼猜想得到了哥德巴赫猜想中的“1＋3”。使对哥德巴赫猜想的研究向前迈开了一大步。我国数学家陈景润利用朋比利的工作和独创的对集合Ω的估计，用加权筛法证明了“1＋2”，被称为筛法研究的顶峰。

朋比利的工作体现为一定理，即：朋比利均

值定理．实际上，它就是研究算术数列：

$$a, a+q, a+2q, a+3q, \cdots$$

中素数分布的许多猜想的一个本质问题．若记算术级数中不大于x的素数个数为 $\pi(x; q, a)$，$\varphi(q)$为不大于q而与q互素的自然数个数．朋比利证明了对于任意的$A>0$，总存在$B>0$，使

$$\sum_{q<x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{(q,a)=1} \left| \pi(x;q,a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| = O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right)$$

在数论的许多问题中，如果假设黎曼猜想成立，可以得到很好的结果．但黎曼猜想离解决相距甚远．朋比利的工作的重大作用在于使许多数论问题获得重大进展，一大批“世界纪录”被刷新．还有一些黎曼猜想成立意义下的结果，也因此而被得到证实．

其实，朋比利从他的少年时代就开始研究数学．1940年11月26日朋比利出身于米兰一位银行家的家庭．米兰是意大利的第二大城市，工业和金融的中心，热闹非凡．喧闹的城市生活并没有影响朋比利的学习兴趣．他很小就醉心于学习数学．十三岁时，他就能啃读数论的课本．他与众不同，看书自有心得，十六岁那年小有成果，十

八岁时就用意大利文发表了他的第一篇论文。从此，他开始了在茫茫数海中遨游的生涯。

朋比利在学生时代最令人折服的结果是他在1962年给出素数定理的新的初等证明。关于素数定理的历史前面几章已介绍过。19世纪末阿达玛和布桑只给出函数论的证明方法，直至1949年，赛尔贝格和爱多士才给出初等证明。尽管赛尔贝格的证明很精巧，但对精度的估计不如原先函数论的方法精确。朋比利却证明了：

$$\pi(x)-\mathrm{li}x=O[x/(\log x)^{A}],$$

$$\text{其中}\ \mathrm{li}x=\int_{2}^{x}\frac{du}{\log u}$$

在前人反复勘掘的地方挖掘出新宝藏，这似乎意味着他具有过人的才智。事实充分说明了这一点，继朋比利的大筛法工作后，他把他的兴趣伸展到数论之外，使前人留下的许多难题得到了飞跃的进展。

1965年，朋比利在卡里加里大学任分析学教授。1966年又任比萨大学的分析教授，这是所创建于14世纪意大利文艺复兴时期的大学，享誉整个欧洲。伽利略试验自由落体的比萨斜塔也座落在比萨城内。在比萨，朋比利成了一名受学生欢迎的教师。这不仅是因为他取得了“1＋3”等成

果而名声大噪，他的课也确实讲得出色．清晰有条理的叙述使人折服，深刻揭示问题本质的思维方法令人难忘．在比萨大学期间，朋比利首先对于单叶函数的比勃巴赫猜想产生了浓厚的兴趣．本世纪初，臭名昭著的纳粹数学家比勃巴赫猜测：对于单位圆域上的正则单叶解析函数

$$f(z)=z+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

有 $|a_2|\leqslant 2$， $|a_3|\leqslant 3$， $\cdots$， $|a_n|\leqslant n$， $\cdots$．

作为这个问题的局部化，首先证明 a_n 的实部 $\mathrm{Re}(a_n)\leqslant n$．1967年，朋比利出人意料地证明了

$$\liminf_{a_2\to 2}\frac{n-\mathrm{Re}(a_n)}{2-\mathrm{Re}(a_2)}>0,\qquad n\text{为偶数；}$$

$$\liminf_{a_3\to 3}\frac{n-\mathrm{Re}(a_n)}{3-\mathrm{Re}(a_3)}>0,\qquad n\text{为奇数．}$$

这个结论的证明用到了许多方面的知识，朋比利对单叶解析函数性态的研究，令数学界同行瞩目．比勃巴赫猜想已于1985年为美国印第安那州普度大学的一位数学家所解决．

几年后，朋比利已把他的兴趣转到极小曲面问题上．极小曲面问题起源很早，1873年比利时物理学家普拉托用伸长于一闭金属线上的肥皂膜取极小曲面的形状．在这里我们先导出下述由普拉托提出的问题：给定一个空间闭曲线，求以曲线

为边缘的极小曲面。现在，人们普遍关心普拉托问题向高维空间作推广。德吉奥基等人已经证明了，当$n=1$、2、3、4、5、6时，$n+1$维欧氏空间中的一类n维极小曲面没有内奇点，但对于$n=7$时的情形却百思不得其解。朋比利的加入给问题带来了生机。首先，他与德吉奥基等人合作证明了$n=7$时可以存在一个奇点。这种从7开始起质变的情况是数学界同行万万没有料想到的。他们还对伯恩赛德猜想提出了一个反例。伯恩赛德曾猜测：存在大范围定义域(R^n)的R^{n+1}中的曲面，如果是极小曲面那必定是超平面。德吉奥基等人曾在60年代前期，证明了对$n\leqslant7$时伯恩赛德猜想成立。然而，他们指出了一个反例：有一个以R^8为定义域的R^9中的极小曲面不是一超平面。这个结果，深刻揭示了某类偏微分方程解空间的几何性态，对研究偏微分方程极为重要。

由于朋比利的杰出工作，声誉日隆。因此他获得了1974年度菲尔茨奖。朋比利获奖后并没有止步，一再显示出他那非凡的数学才能。他是一位“……，迅速地掌握一个复杂的新领域的精髓，从中挑出可以研究的重大问题，用非凡的能力去解决问题……”的数学家。如果说以往的成果烙有深刻的分析印记，那么他在1980年给出

有限单群中的一个唯一性证明，则充满了浓厚的代数味道。

朋比利的数学成果可谓果实累累，涉猎于许多数学分支。然而，他对生活充满热情和爱。他十分热衷于国际象棋和桥牌，百忙之中，也忘不了在自己的集邮册、贝壳收藏柜中增添几枚精品。假日里，他常去僻静的地方悠闲垂钓。当然，他一刻也没忘记自己的事业。这种松紧结合的工作方式，也许是他成功的一个因素。

朋比利现在仍处于创造的盛期，人们期待着他能解决更多的数学难题。据说，他的当银行家的爸爸曾许诺：要是朋比利能解决超级难题黎曼猜想的话，他将奖给他一件礼物。黎曼猜想迄今仍未解决，这礼物到底是什么？这自然亦是个谜。

6.3 皮埃尔·德林与魏依猜想

数学历史的发展犹如长江后浪推前浪，不停地奔向前方。几个世纪以来，法国数学界伟人辈出，造就了一代又一代享誉国际数坛的数学家。布尔巴基学派的创始人丢东涅和魏依，以及菲尔茨奖获得者格罗登迪克和塞尔都是当今国际数学界的重要人物。“江山代有才人出，各领风骚数百

年”. 那么，谁是今天法国数学界最杰出的人物呢？他，一位比利时人，解决魏依猜想这个被誉为划时代成果的比利时青年数学家比埃尔·德林。由于他解决了魏依猜想，因此他获得了1978年度的菲尔茨奖。

魏依猜想的获证，可以说是近四十年来代数几何学的最重大成就。为了说明这个猜想及德林工作的价值，不妨让我们把话题稍微延伸得远些。

代数几何学是一门古老的学科，它最原始的研究对象就是代数曲线和代数曲面。本世纪以来，意大利数学家在代数几何学方面成果累累，但他们的发现很难为人理解。能不能在抽象代数和拓扑学的基础上建造一座严整的数学大厦？这个问题已经由查瑞斯基和魏依解决。魏依正是在此时投入这个工作的。

在40年代，魏依花了大量的时间思考这个问题。过去的代数簇是复数域上由多项式所定义的零点集合，能否不用坐标，内蕴地定义代数簇，这是魏依最初解决的问题。其次，他研究了两个代数簇的交截性态的交截理论，并且建立了严格的理论基础。他的理论不仅对于复数域，而且对于任意特征 p的代数闭域也适用。再有，查瑞

斯基引进了以他的名字命名的拓扑，通过它把所有点联系起来，形成每点都对应着一种特殊的交换环。从此，代数几何学的严整体系应 运 而 生了。

无论哪一套理论，其目的就是要解决具体的问题,不然它是一堆废物.魏依和查瑞斯基的代数几何学确实可解决一些数学中的难题，特别是数论问题。对有些数论问题，复杂的解析工具无能为力，但是，代数几何却能够得出漂亮的结果。最突出的例子就是黎曼猜想。魏依非常希望能解决原来的黎曼猜想，即$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$的零点都在复平面实部为 1/2的直线上。这个问题至今仍未解决。不过,对于任意有限域上的代数簇,都能定义相应的 ζ函数,也都有相应的黎曼猜想。1933年，汉斯首先证明了椭圆曲线上的黎曼猜想。而魏依在40年代证明了关于代数域上所有代数曲线的黎曼猜想。并由此提出了一般簇的黎曼猜想，即魏依猜想。它们是说：

如果k是p个元素的有限域，v是k上n维完备非异代数簇，k_m是k的m次扩域，N_m是v在 k_m中的点个数，并定义代数簇同余的 ζ函数为

$$\frac{d}{du}\log Z(u, v)=\sum_{m=1}^{\infty}N_m u^{m-1}, Z(0, v)=1$$

那么

（1）$Z(u, v)$是u的有理函数；

（2）$Z(u, v)$满足一个函数方程，它与黎曼ζ函数满足的函数方程相类似；

（3）$Z(u, v)$ 的零点与极点的绝对值是$p^{-1/2}$的幂；

（4）如果v是另一特征0域上簇v'的“模约化”，那么（3）中的一些有关量就v'作为复簇的贝蒂数。（贝蒂数是一拓扑量）

1949年，魏依猜想一提出，就吸引了许多一流数学家。在60年代，魏依猜想成为代数几何学的中心问题。人们为解决猜想，引进了许多新工具，借助了许多分支的成果。德林的导师格罗登迪克本人也以证明魏依猜想为夙愿。他那庞大的代数几何研究计划就是为证明猜想而提出的，他证明了除（3）（4）外的其余两条性质。值得一提的是，1970年在国际数学家大会上，苏联数学家庞得里亚金做了“微分对策”的报告，其中牵涉到导弹跟踪飞机之类的问题，格罗登迪克不顾大会的秩序，上台抢话筒，抗议在数学会议上演

讲与军事有关的问题．后来他发现数学研究成果可以直接或间接地应用于军事，于是，他毅然脱离数学研究，回到家乡的农庄去务农．然而德林继承了他的事业并把他的事业推向成功的顶峰．德林1973年和1974年相继发表了《论魏依猜想》的两篇论文，从而结束了许多一流数学家参加的“战役”．

德林一直是生长在法国数学大家庭的环境之中．1944年10月3日，他出生于布鲁塞尔，十四岁起就开始拜读布尔巴基的著作《数学原理》，并征服了这套严密、浩繁而又高度抽象的著作，显示出德林把握抽象内容的惊人天赋．当他进入布鲁塞尔大学时，已对近代数学有了一定的认识．著名的群论学家梯茨发现了这位天才，他不仅使德林的基础知识臻于完美，而且把他这位有才能的学生送到巴黎深造．以后的事实说明，这是很重要的一步．当时，这位二十岁出头的年轻人来到当代的大数学家塞尔、格罗登迪克、阿提雅等人的身边．他坐在一个角落里，认真地听讲着、思考着．有时，主讲人讲到一些尚未解决的问题，他听完后，便提出可以如此这般地解决，有时这些大师们对他的方法也感到莫名其妙．德林的研究工作受格罗登迪克和塞尔的影响是很深

刻的，他没有化费多大的精力就掌握了这两位大数学家的思想和技巧．在以后几年的研究中，基本上是格罗登迪克研究方向的延伸和扩展．这些却丝毫没有使德林的风彩逊色．他以其广博的知识，从许多风格迥异的数学分支中，调集出有用的思想．而且使这些思想升华并熔为一炉，这正是德林大大高于别人之处．对于德林的才能，他的导师格罗登迪克曾经评价说：“德林在1966年就与我旗鼓相当了．”塞尔后来还曾向德林请教过问题．自然，德林的两位导师都很谦虚，但是德林无疑是才智超人．1973年德林完全解决了魏依猜想，这是70年代纯数学领域中取得的最辉煌成就．

德林因解决了魏依猜想而蜚声遐迩，荣誉接踵而至．1974年，比利时皇家科学院把价值三万法郎的“法郎士·德儒茨奖金”授予他．1978年，德林成为法国科学院最年轻的院士，并成为法国拿高科学研究所四名终身数学教授中的一员．德林在其他方面的工作也很出色，他是一位研究面非常宽阔的数学工作者．他喜欢并且有能力和任何人谈论数学课题，在讨论中他的想法和提问总是使人获益匪浅．不象前面两位获奖者的业余生活那样丰富，除了数学外，德林喜欢种些绿色植

物，喜欢骑自行车代替徒步，而不喜欢驾驶汽车。在复活节时，有可能的话，他还饶有趣味地组织近邻的孩子们去寻找彩蛋。

关于魏依猜想，当代大数学家丢东涅认为："这仅仅是通向未知的更加激动人心的新领域的一把钥匙，而不是自身的终结。这个未知领域蕴藏着众多的猜想，他与分析学、代数几何学及数论相互渗透，调制出一种诱人的美酒"。尽管这个关于一般簇的黎曼猜想已经解决，但黎曼猜想离解决还很遥远。我们深信年轻的一代数学家一定能确证黎曼猜想的真伪。

七 素数分布的一些猜想



在人类生活中有这样的奇特现象：人们对于一些微妙或遥远的事物有比较深刻的研究和认识，而对于一些寻常或习见的事物却不太了解。例如，现代人类可以乘坐宇宙飞船到月球上去漫步，但却没有任何人到过太平洋底。同样地，科学家对于微观世界的秘密有那么多的设想和实验，但对每天用到的正整数1、2、3、……的性质却还有许多问题难以解答。早在几千年前，人们就知道正整数、素数的一些性质了。公元前3世纪，欧几里得在他所著的《原本》一书中阐述了正整数的许多性质。书中给出了素数的定义：如果一个正整数p除了1及其自身外不能被任何一个正整数整除，那么p称为素数。不是素数的正整数称为合数。至于素数在正整数中如何分布，人们至今认识得还很少。许多数学家在素数分布的研究中提出过一些猜想，其中有的已经解决，有

的已得到较大的进展，但还有大量的猜想流传至今，还没有得到解决。

7.1 素数分布的不规则性

素数在正整数中的分布是很不规则的．在《原本》一书中，欧几里得已经证明了素数有无穷多个．假设素数共有n个，将它们按大小顺序排列时，第i个素数记为p_i．于是，最大的素数应该是p_n．我们来证明这是不可能的：用$p_n!$表示乘积$p_n(p_n-1)\cdots2\cdot1$．在$p_n!$的因子中一定包含了一切$p_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，因而$p_n!$可以被每一个p_i整除．可见正整数$(p_n!+1)$不可能是任何一个p_i的倍数，也就是说$(p_n!+1)$的素因子都大于p_n，因而素数一定有无穷多个．尽管如此，素数的个数还是不太多．我们如果将不超过x的素数的个数用$\pi(x)$来表示，那么，当x很大时，$\pi(x)$比起x来是一个很小的数．也就是说，当x趋于无穷大时，$\pi(x)/x$趋向于0，我们称这个结论为：在正整数中几乎处处都不是素数．那么，素数在正整数中的分布情况如何？有什么规律？例如，是否有些素数的差很小？我们知道除2以外的偶数都是合数，因此两个大于2的素数之差至

少是 2．如果把奇数按大小顺序排列，其中有许多相邻的奇数都是素数．例如：3、5、7及11、13都是素数，而且相邻两数之差都是 2．但是也有一些相邻素数的差很大．我们可以找到连续 r 个正整数都是合数．例如，我们可以取这r个数为 $(r+1)!+2$，$(r+1)!+3$，…，$(r+1)!+(r+1)$，其中第i个数为 $(r+1)!+(i+1)$．由于 $1\leqslant i\leqslant n$，$(r+1)!$ 以 $(i+1)$ 为因子，因此 $(r+1)!+(i+1)$一定能被$(i+1)$整除．这里的$(i+1)$可以从 2 开始取到$r+1$，可见这r个数都是合数．这些数的前后两个素数之差一定比r大．

从上面讨论可以初步看出：素数在正整数中的分布时疏时密很不规则，致使许多看来很通俗易懂的问题长期得不到满意的解答．1912年，德国数学家兰道收集了当时未解决的四个古老的猜想：

1）有无穷多个自然数n，使得 n^2+1 是素数．

2）哥德巴赫猜想：任何一个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数之和．

3）孪生素数猜想：存在无穷多对素数，它们的差为 2．

4）杰波夫猜想：对于一切自然数n，在n^2与

$(n+1)^2$ 之间至少存在一个素数。

7.2 相邻素数的间距

我们将素数按大小次序排列成：$p_1, p_2, \cdots$。第n个素数记为p_n。又设$d_n = p_n - p_{n-1}$，即 d_n 为相邻两素数之差。现在我们讨论d_n的性质。前面已经指出，对某些正整数n而言，d_n 可能很大，而对另一些n，d_n可能很小。对于任意实数r，一定可以找到连续 r 个合数。即一定存在一个正整数n，使得 $d_n > r$。对于d_n的性质的研究中最重要的问题之一是讨论d_n的上界。当然，我们希望这个上界越小越好。现在，我们把这个问题换一种提法。设D是满足下列条件的正数：当 N 取任意正整数时，在N与 $N+D$ 之间一定有素数存在。如果取$N=p_{n-1}$，则第n个素数p_n一定比 $N+D$小。也就是$d_n = p_n - p_{n-1} < D$。因而对 d_n的上界讨论可以化为下列问题：如何寻找正数D，使得对一切正数x，x与$x+D$之间一定有素数？

实际上，前面我们已经说明了：对于任意固定的实数r，$D=r$ 时命题不成立。这是因为当 x 增大时区间 $(x, x+r]$ 的长度永远不变的缘故。如果我们把D取得与x有关，命题才有可能成立。

兰道提出的第四个猜想可转化为：当x是充分大的实数时，在x与$x+x^{1/2}$之间是否一定有素数？很明显，D取得越大，x与$x+D$之间的数就越多，有素数的可能性就越大。贝特兰大在很久前提出过一个很弱的猜想：$D=x$时，$(x, 2x]$中一定存在素数。切比晓夫很早以前就用初等方法证明了这一猜想。我们进一步要问：对于小于1的正数θ，$(x, x+x^{\theta}]$中是否一定存在素数？1930年赫海什尔证明了当$\theta \geqslant 32999/33000$时，$(x, x+x^{\theta}]$中有素数。1933年海尔布朗证明了$\theta \geqslant 249/250$。1949年闵嗣鹤证明的关于$\zeta$函数在实部为1/2的直线上的值的上界估计，可以得到$\theta \geqslant 38/61$。1979年因凡涅斯和裘地拉用改进了的筛法，证明了$\theta > 13/23$。同年希恩—布朗和因凡涅斯指出用上文的方法可以得到$\theta > 5/9$，并证明了$\theta > 11/20$时，$(x, x+x^{\theta}]$中有素数。楼世拓和姚琦改进了筛法的上界估计式，用新筛法证明了目前最好的结果：$\theta > 6/11$。在黎曼猜想成立的前提下，我们可以很容易地证明：当x为充分大的实数时，$(x, x+x^{1/2}\log x]$内必有素数存在。这也是人们认为的这个领域内的最佳结果。

7.3 哥德巴赫猜想和孪生素数猜想

兰道提出的第二和第三个猜想分别是哥德巴赫猜想和孪生素数猜想。孪生素数有很多，例如3与5，5与7，11与13等。目前已经知道的10万以内的孪生素数共有1224对，100万以内的共有8164对，3.3×10^7以内的共有152892对。迄今为止，人们找到的最大的孪生素数为：

1,000,000,009,649与1,000,000,009,651.

在哥德巴赫猜想研究中，人们常这样考虑：设N是任意一个大于2的偶数，并用p表示素数。当p取遍一切素数时，我们就得到无数个形如$N-p$的数。假如其中有一个是素数，将它记为p'，于是$N=p+p'$。如果我们可以证明一切大于2的偶数都有这种性质，则哥德巴赫猜想成立。相应地，孪生素数猜想可以叙述为：对于每一个素数p，可以写出一个数$p+2$。如果p取遍一切素数，我们可以写出无数个形如$p+2$的数。假如我们能够证明这些数中有无穷多个素数，那么，孪生素数猜想成立。由于哥德巴赫猜想和孪生素数猜想的上述提法十分相似，所以人们常常把它们视为一对“姐妹问题”。

1965年，意大利数学家朋比利在“大筛法”方面作出了杰出的成果。这一工作可直接导出下列命题：对任意一个大偶数N，总可表示成一个素数p与不超过三个素因子数P_3的和，即：$N=p+P_3$。这个结果在黎曼猜想成立的前提下，是容易得到的。但是猜想本身不能成为正式证明的基础。朋比利却巧妙地绕过了黎曼猜想而证明了它。哥德巴赫猜想和孪生素数猜想的最优结果是由陈景润得到的。陈景润利用朋比利的“大筛法”结果和他独创的对集合Ω的估计，证明了每一个大偶数可以表为一个素数与一个不超过二个素因子的数之和。同时也证明了有无穷多个素数p，使得$p+2$可表为一个不超过二个素因子的数之积。

关于孪生素数还有一些推广。容易看出，对于任一素数p，在p，$p+2$，$p+4$三个数中至少有一个是3的倍数。可见除了3、5、7外上述三个数不可能都是素数。我们转而观察p，$p+2$，$p+6$。如果它们都是素数，就称为三生素数。人们猜测，有可能存在无穷多组三生素数。我们还可以对于$n-1$个自然数l_1，l_2，…，l_{n-1}（$l_1<l_2<l_3<\cdots<l_{n-1}$）来考察$n$个数：$p$，$p+l_1$，$p+l_2$，…，$p+l_{n-1}$。如果它们都是素数，我们就称之为

n 生素数．同样有“n生素数猜想”：存在无穷多组n生素数。

7.4 等差级数中的最小素数问题

许多数学家研究了等差级数

$$l,\ l+q,\ l+2q,\ \cdots, l+nq, \cdots \qquad (1)$$

中有多少个不超过 x的素数的问题．首先我们将不超过x的正整数按其除以q后得到的余数 0,1, …，$q-1$来分类：

$$\left.\begin{array}{l} 0\text{类：}q,\ 2q,\ \cdots,\ n_1q \leqslant x, \\ 1\text{类：}1,\ 1+q,\ 1+2q,\ \cdots,\ 1+n_2q \leqslant x, \\ \vdots \\ q-1\text{类：}q-1,\ q-1+q,\ q-1+2q,\ \cdots, \\ \qquad q-1+n_{q-1}q \leqslant x. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

很容易证明其中有些类是没有素数的．如果 l 与 q 有大于 1 的公因子，那么第 l 类中就没有素数．如果l与q没有大于1的公因子，也就是l, q互素时，人们已经证明级数(1)中一定有素数．我们进一步考察此时级数（1）中的第一个素数出现的位置．也就是问，当 x取多大时，级数(1)不超过 x的那些项中至少有一个素数？林尼克在

1950年证明了：存在这样的常数c，使得等差级数中不超过q^c的那些项即$l+q, l+2q, \cdots, l+nq(\leqslant q^c)$中一定有素数。当然，$c$取得越小，级数（1）中不超过$q^c$的项就越少，结果就越好，但也越是难以证明。

1957年，潘承洞首次定出$c\leqslant5448$，以后有许多数学家改进了这个结果。1977年芬兰数学家裘地拉证明了$c\leqslant60$及$c\leqslant36$。1979年美国数学家又证明了$c\leqslant20$，同年陈景润证明了$c\leqslant17$。但是，如果黎曼猜想是正确的，我们就可以得$c\leqslant 2+\varepsilon$，这里ε是一个任意小的正数。关于算术级数的最小素数问题，乔勒有比黎曼猜想成立意义下更强的猜想，他猜测：$c\leqslant1+\varepsilon$。

7.5 素数定理

前面说过，我们用$\pi(x)$来表示数值不大于x的素数的个数。素数定理是说：当x趋于无穷大时，$\pi(x)\approx\dfrac{x}{\log x}$，也就是说，不大于$x$的素数的个数约为$\dfrac{x}{\log x}$。假如素数在正整数中的分布是均匀的，在每$[\log x]$个正整数中应该有素数。

但是，素数分布并不均匀，因此这是不可能的。克莱默在1936年借助于概率理论为基础的方法提出了一个猜想：当 $D=\log^2 N$ 时，对任何自然数 N，N与$N+D$之间一定有素数。也就是说，在每〔$\log^2 N$〕个正整数中至少有一个素数。明显地，这比在黎曼猜想成立时得到的结论要强得多。

自从阿达玛、普辛在1896年分别独立地证明了这个定理以后，人们致力于研究素数定理的误差项，即研究 $\pi(x)=\dfrac{x}{\log x}+A$的末项 A 的最佳估计。当今最好的结果是1958年苏联数学家维诺格拉多夫得到的 $A=O(xe^{-a(\log x)^{3/5+\varepsilon}})$，这里$a$是某个正数，$\varepsilon$是一个任意小的正数。从1791年勒让德、高斯提出关于素数定理的猜想，到阿达玛、普辛证明这个定理，经过了一百多年的漫长岁月。在这一百多年中，许多著名数学家如勒让德、切比晓夫等都在这方面作出了贡献。而从证明素数定理到1958年，又经过了六十八年。在这期间，又有许多数学家研究了素数定理的误差项。例如：1899年～1900年普辛证明了 $A=O(xe^{-a\sqrt{\log x}})$，1922年李特伍德改进为 $A=O(xe^{-a\sqrt{\log x\log\log x}})$。然而，在黎曼猜想成立的前提下，可以证明：$\pi(x)=x/\log x+O(x^{1/2}\cdot$

$\log x$)，即 $A=O(x^{1/2}\log x)$。很显然，目前的最佳结果与假定黎曼猜想成立下所得的结果相差甚远。

令人感兴趣的是，素数定理的误差项是不规则的。由数值计算可以看出，似乎应该有

$$\pi(x)<\mathrm{li}\,x，这里\mathrm{li}\,x=\int_2^x\frac{du}{\log u}$$

例如，有人证明了$\pi(10^9)<\mathrm{li}(10^9)$。但是李特伍德在1914年证明了有充分大的 x，满足 $\pi(x)>\mathrm{li}\,x$，而这样的x将出现无穷多次。李特伍德的定理纯粹是一个“存在定理”。以后，有人在黎曼猜想下证明了：存在适合 $x<e^{e^{e^{7.703}}}$ 的整数 x，使

$$\pi(x)>\mathrm{li}\,x$$

在不假定黎曼猜想时，又证明了有整数$x<10^{10^{10^{10^3}}}$也具有此同一性质。这个数目比宇宙中的原子数还要多得多。

7.6 素数分布的其他一些猜想

兰道提出的第一个猜想：形如 n^2+1的素数是否有无穷多个？这个命题至今也还没有解决。当今最好的结果是因凡涅斯在1979年得到的。用

他改进的筛法证明了：有无穷多个自然数n，使得n^2+1可以表为具有不超过两个素因子的数。

美国数学家阿普斯托尔的《解析数论导引》中收集了关于素数分布的12个问题，除前述外还有：

1）是否任意大于2的偶数都是两个素数之差？

2）是否存在无穷多个是合数的默森尼数（形如2^n-1的数，n是自然数）？

3）是否存在无穷多个默森尼素数？即是否存在无穷多个自然数p，使得2^p-1是素数？

4）是否存在无穷多个是合数的费尔马数（形如$2^{2^n}+1$的数，n是自然数）？

5）是否存在无穷多个费尔马素数？即是否存在无穷多个自然数n，使得$2^{2^n}+1$是素数？

6）对于给定的k，是否存在无穷多个形如n^2+k的素数？

7）是否存在无穷多个素数，它们的各位数都是1？例如：11及11,111,111,111,111,111,111,111这两个数都是素数。

美国一家公司发现迄今最大的素数$2^{216091}-1$，它有65050位数字。这个数字能印满两页报纸。

对于费尔马数，若记$F_n=2^{2^n}+1$，目前我们

已经知道$F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$都是素数．费尔马曾猜测所有的F_n都是素数，1732年欧拉证明了$F_5=641\times6700417$，从而推翻了费尔马的猜测，并将该猜测改为：是否有无穷多个n，使得F_n是素数？到目前为止，我们已经知道46个费尔马数是合数，其中最大的一个是F_{1945}，它的值大于10^{582}．高斯曾经证明：若F_n是素数，则正F_n边形一定可以用圆规和直尺来作图．由此可见，关于费尔马数的猜测有深刻的几何意义．

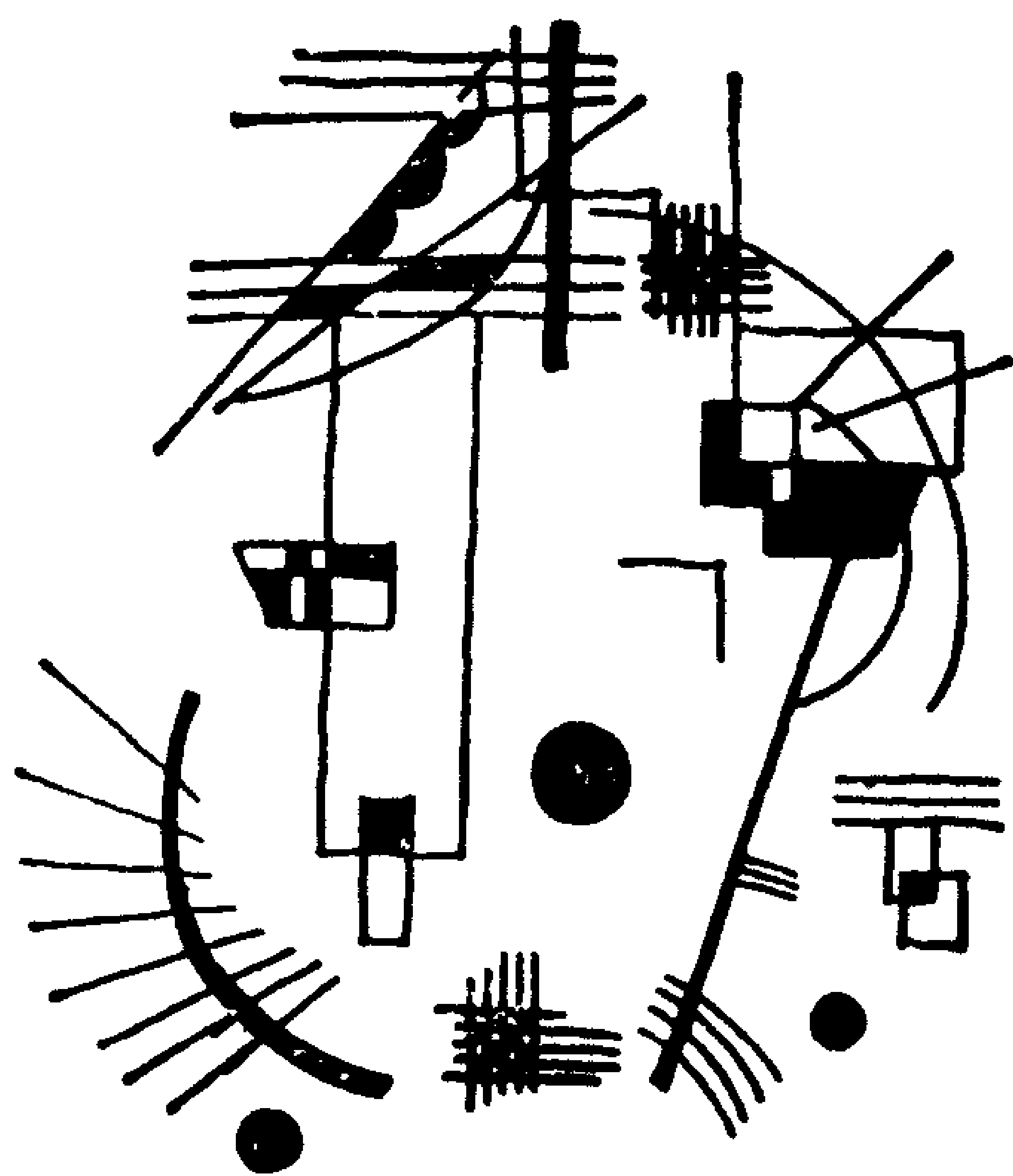
7.7 研究素数分布的意义

以上介绍了关于素数分布的猜想的一部分．这些猜想虽然都是通俗易懂的，但要想证明或推翻，即使是前进一步，都是极为困难的，因此其中大部分至今尚未解决．从数论发展的历史看来，新的猜想的产生往往比老的猜想的解决要快得多．著名数学家谢尔宾斯基说过："我们数论知识的积累，不仅依靠已经证明了的理论，而且也依靠那些未知的猜想．"也就是说，人们在研究这些猜想的过程中丰富了自己的知识，从而促进了数论和数学其他分支的发展．例如对于素数

定理的研究促进了函数论特别是整函数论的发展，又如数论的重要分支代数数论产生于对费尔马猜想（不定方程$x^n+y^n=z^n$，当$n\geqslant3$时无正整数解）的研究．虽然费尔马猜想至今尚未解决，但人们对代数数论的兴趣似乎已超过了对这个猜想本身的关心．我们还可以看到，现代计算技术的发展已赋予数论这一古老学科以新的活力．我们可以用数论方法将一些连续性的问题化为离散问题来处理．例如计算函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的积分的近似值时，可以寻找a，b之间的一些点x_0，x_1，…，x_n，用和$f(x_1)\Delta x_1+\cdots+f(x_n)\Delta x_n$来近似地表示积分值．当函数$f(x)$满足一定条件时，这个问题就化为如何取一些点使得它们在$[a,b]$中分布得比较均匀的问题．这就是数论中寻找一致分布点的问题．过去由于计算工具落后，对于积分的近似计算的研究仅限于单重积分．从50年代开始，华罗庚和王元创立了著名的“华—王法”，他们用数论方法构造出高维立方体中的一致分布点集，然后用这个点集上被积函数值构成的积分和来近似地表示多重积分．当被积函数满足一定的条件时，用这种方法产生的误差的主要部分与维数无关，而用古典方法得到的高维数值积分公式却常常由于在维数大时误差很

大而无法使用．“华—王法”无论在实际应用上还是在理论上都取得了很好的成果．这也是数论直接应用于计算的一个重要的范例．

八 黎曼猜想的进展



自1859年黎曼提出猜想至今，已有一百多年的历史。经过几代数学家前赴后继地努力工作，在黎曼猜想的研究领域成果累累，通过研究猜想除了能揭示素数分布的性态外，还实实在在地解决了数域论、椭圆函数论、模函数论等许多领域中的一些实质性问题。我们在此仅回述一下黎曼猜想发展的历程。

著名的黎曼ζ函数早在1730至1750年间已有欧拉提出，并在1749年部分地证明了ζ函数满足一个函数方程。对于实部大于1的复数s定义$\zeta(s)$是容易的，这时级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

收敛，它的和就定义为$\zeta(s)$。对于其它s值则用解析开拓来得到$\zeta(s)$。根据复函数理论可知：存

在唯一的一个解析函数，定义域为除点1外的整个复平面，且 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时与上述级数给出的值完全一致，其中点1是 ζ函数的简单零点。这一工作称之为解析开拓，由赫克完成。事实上，黎曼也曾证明：差$(\zeta(s)-1)/(s-1)$定义了一个整函数。

黎曼也证明了 ζ函数满足函数方程：

$$\zeta(1-s)=\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$$

其中 $\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^s e^{-x}dx$，当 s 为正整数时，有 $\Gamma(s+1)=s!$。

由此并根据Γ函数的已知性质可以推出，负偶数点都是 ζ函数的零点。而这些负偶数点被称之为 ζ函数的平凡零点。

欧拉首次用整数的唯一素因子分解给出 ζ与素数之间的关系式，即所谓的欧拉公式：

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right)$$

这里p取遍所有的素数；这个方程在 $\mathrm{Re}(s)>1$定义的半平面上成立。在上述半平面上，乘积是绝对收敛的，从而 $\zeta(s)\neq0$。由函数方程知，在 $\mathrm{Re}(s)<0$定义的半平面上，$\zeta(s)$除了平凡零点外，再没有别的零点了。然而 ζ 函数在这两个半平面

之间$0 \leqslant Re(s) \leqslant 1$的带状区域上，却有无穷多个零点。

在此值得一提的是：ζ 函数与素数分布的内在联系与ζ的零点位置．有关设$\pi(x)$为不大于正数 x的素数个数，由素数定理我们是否可以推想，$\pi(x)$与$\mathrm{li}x$之间的差（对于充分大的x）成立下述关系式：

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(x^{\theta})?$$

其中 $\mathrm{li}x = \int_2^{\infty} \frac{du}{\log u}$，$\theta$ 是一个正数．若已知上式成立，则$\zeta(s)$在 $\mathrm{Re}(s) > \theta$ 定义的半平面上无零点．请注意：关于素数分布的一个假设会给出 ζ 函数零点的信息．反过来，若已知当$\mathrm{Re}(s) > \theta$时，$\zeta(s) \neq 0$，则

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(x^{\theta}(\log x)^2)$$

由此可见，要对 $\pi(x)$ 有更多的了解，就要对ζ函数的零点有更多的了解．黎曼首先证明了ζ函数的头几个零点的实部都等于1/2．因此，黎曼猜测所有非平凡零点都在 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$的直线上，这断言就是我们所谈的主题——黎曼猜想．

时至今日，我们有关非平凡零点的知识，都有助于说明猜想成立。

人们为想象中的事物工作比为实际问题更努

力，人的心理就是这样地怪。1968年美国威斯康辛大学的三位数学家罗塞、舍恩菲尔德、约赫在黎曼猜想研究中，使用了计算机来证明ζ函数的前三百万个非平凡零点都落在复平面实部为$\frac{1}{2}$的直线上。因为，不管计算机的计算能力有多强，它的计算必尽是有限的，不可能达到无穷，所以,它也不可能说明ζ函数零点的黎曼猜想，而只能提供支持猜想的依据。数学史上不乏例证，说明有限推理的不可靠性。例如1914年，英国数学家李特伍德发现，某方程直到很大的数都是正确的，但超过这个值的无穷多个数是错误的。现今这个数的最好估计大于10^{100}．1后面100个零，请大家想一下，这数与宇宙的原子数比较一下，该谁大?

罗塞、舍恩菲尔德、约赫的研究还间接说明了另一个有趣的事实。纯粹数学家们对计算机是有点怀疑的。这是因为计算机是个机器，机器本身可能出错误。为此，罗塞、舍恩菲尔德和约赫三人以宗教般的热忱非常仔细地复查了计算程序。在检查机器的过程中，他们发现计算机本身在内在逻辑方面有几个错误。这部机器使用多年，没有发现过这种事情。的确，错误是微妙

的，不可能影响日常计算。然而，首先发些这些错误的人，竟是研究最微妙的一门数学中的三个人。经验的迹象是令人鼓舞的，最近，勃赖特的计算证实了ζ函数的开头七千万个零点都位于复平面实部为$\frac{1}{2}$的直线上。

人们在日常生活中，常遇到这样一种情况，如果一个最高愿望不能马上得到，那么就争取达到较次的愿望。几乎所有的科学研究中都有类似情况。一种处理黎曼猜想的方法，首先是由阿达玛和普辛在利用ζ函数零点性质证明素数定理时提出的。由于ζ(s)的所有非平凡零点只可能在$0\leqslant\sigma<1$这个无限伸长的带状区域中(如右图8.1)，所以阿达玛和普辛的基本思想在于估计非平凡零

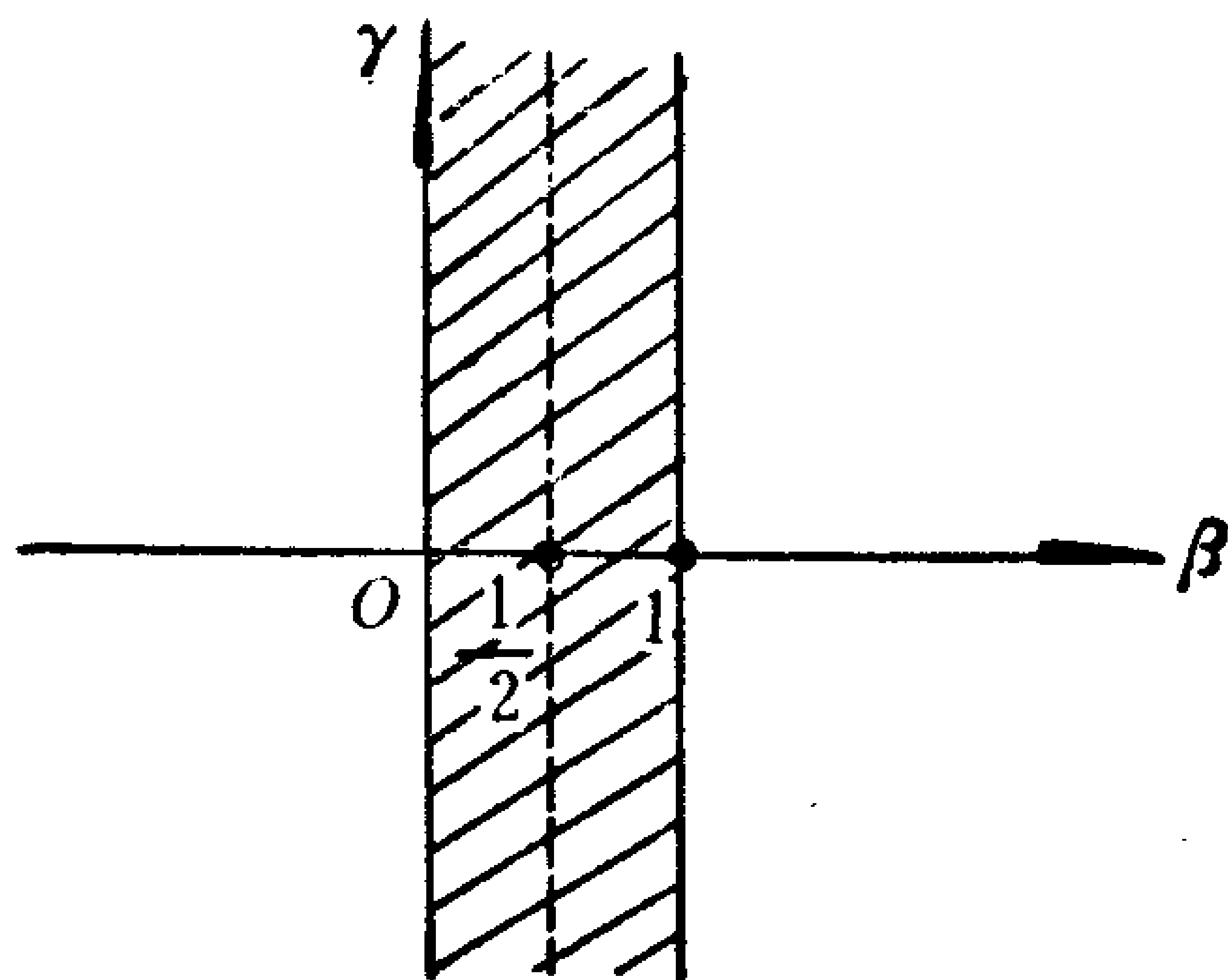


图8.1

点所落的带状区域的范围。因为我们知道，若$\zeta(\beta+i\gamma)=0$，则有$1/\log|\gamma|<\beta<1-(1/\log|\gamma|)$，其中 $|\gamma|>14$。这也就是说$\zeta(s)$的非平凡零点不能接近图8.1所示的边界 $\beta=0$和 $\beta=1$。同样，即使是$\zeta(s)$的大部分零点不落在 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 的直线上；但也会非常靠近它。也就是说：若存在 $\delta>0$，且有 $0<\gamma\leqslant T$，$\left|\beta-\frac{1}{2}\right|>\delta$，则一定存在 $\theta=\theta(\delta)<1$，使得$\zeta(\beta+i\gamma)$的非平凡零点的个数小于T^{θ}。这个估值远远小于形如 $\beta+i\gamma$ 的非平凡零点总数 $N(T)$，其中 $0<\gamma\leqslant T$；因为我们已经知道，当T趋于无穷时

$$N(T)/(T\log T/2\pi)\xrightarrow[T\to\infty]{}1$$

很显然，基于阿达玛和普辛的思想，当我们能够证明$\zeta(s)$的非平凡零点所属的区域缩小到一根直线时，那么黎曼猜想成立。而今，这方面的结果，离猜想的解决还非常遥远。

另一种处理黎曼猜想的方法，是由哈代于1914年引进的。当时他宣布说：他证明了$\zeta(s)$有无穷多个非平凡零点落在 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$直线上。若假设$N_0(T)$为$\zeta(s)$在 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$且$0<\mathrm{Im}(s)\leqslant T$直线段的零点个数，则哈代定理断言：当 $T\to\infty$

时，$N_0(T)\to\infty$。随后，哈代和李特伍德合作得到更精确的定理：存在常数$C>0$，$N_0(T)>CT$。1942年，赛尔贝格引进了新的想法，考虑$N_0(T)$和$N(T)$之间的关系。他的定理证明了：$N_0(T)\geqslant CT\log T$，(这里$C>0$)。赛尔贝格定理实际上证明了：

$$N_0(T)\geqslant CN(T)$$

此处C为大于零的实数。不过，赛尔贝格得到的常数C只有百分之一那么大。

我们根据图8.1，及$N_0(T)$和$N(T)$的定义，显然有

$$N(T)\geqslant N_0(T)$$

如果我们能够把赛尔贝格定理中的常数C提高到1的话，那么，我们就有$N(T)=N_0(T)$成立。这就是数学家解决黎曼猜想所企求了百余年的结果。

1974年，美国麻省理工学院的数学家莱文森成功地证明了：对于充分大的实数T，

$$N_0(T)\geqslant\frac{1}{3}N(T)$$

因此，$\zeta(s)$至少有三分之一的非平凡零点落在$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$的直线上。

尽管莱文森的处理用到了赛尔贝格的某些技

巧，但用来检验$\zeta(s)$在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 直线上零点的基本手法是完全不同的。这种区别尤其明显地表现在：赛尔贝格的论证不需要计算常数就成功了，而莱文森的方法却不能预言他的方法会成功；只是在经过许多细致的计算后，才能发现那些常数是行得通的。赛尔贝格和莱文森方法的另一个区别在于他对重零点个数的计算。赛尔贝格的方法考察 $\xi\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)$的变号，这里$\xi(s)=\zeta(1-s)$，从而断定相当大一部分零点具有奇数重数且落在复平面实部为$\frac{1}{2}$的直线上。而莱文森对重点的讨论是无效的，但赛尔贝格和希思——布朗分别独立地发现原方法稍加变化，就可得到只是简单零点的个数。因此三分之一的零点是简单的且落在复平面实部为$\frac{1}{2}$的直线上。

考察莱文森的想法可以推进到什么地步。这还需作多方面的尝试，但繁重的技巧细节使进展困难。莱文森早年在常微分方程和偏微分方程领域作出过杰出贡献，他对黎曼猜想的研究是在他死于癌症前不久才得出的。仅这一项成就已能永垂千古。他不畏病魔，献身科学的精神是值得我们每一个科学工作者学习的。

1980年，楼世拓、姚琦在莱文森工作的基础上，对莱文森定理稍加改进，证明了：

$$N_0(T)>0.35N(T)$$

许多数学工作者从各个角度研究 ζ函数零点的性质，得到了十分丰富的结果和重要的应用。

"$\zeta(s)$的非平凡零点全部落在$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$的直上"这个命题等价于"在 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$的直线外$\zeta(s)$没有非显然零点".我们可以证明:$\mathrm{Re}(s)\geqslant 1$ 时，$\zeta(s)$没有零点。但是，我们还不能证明，对于任何一个小于 1 的α，$\mathrm{Re}(s)\geqslant\alpha$ 时，$\zeta(s)$ 没有零点。为此，我们再把命题减弱一些，只希望在上述范围内零点个数不很多，这就是所谓的零点密度问题。对于 $T\geqslant 2$及$\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$,我们用 $N(\alpha;T)$表示$\zeta(s)$在矩形

$$\alpha\leqslant\mathrm{Re}(s)<1,\quad |\mathrm{Im}(s)|\leqslant T$$

中的零点个数。对于$N(\alpha;\ T)$的估计称为零点密度估计。苏联的天才数学家林尼克首先在这方面作出了杰出贡献。目前，这方面的最好结果是赫克斯雷在1973年得到的，他证明了：

$$N(\alpha;T)\ll T^{2.4(1-\sigma)}$$

另外，许多人研究了 ζ函数的中值公式

$$\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt$$

的估计式，这里 k为正整数．这方面的第一个著名工作是由哈代和李特伍德在1918年完成的，他们证明了渐近公式：

$$\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2}dt\sim 2T\log T$$

次后，英厄姆于1926年证明了

$$\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{4}dt\sim\frac{1}{\pi^{2}}T\log^{4}T$$

至于 $k\geqslant 3$ 的情形，仍是一个没有解决的问题．这个问题的解决对解析数论的贡献将是很大的．

二次中值公式估计式至今最好的结果是由印度数学家巴勒苏勃拉曼尼在1978年得到的，他证明了：

对于$T\geqslant 2$及$\varepsilon>0$，有

$$\int_{0}^{T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2}dt=T(\log(T/2\pi))+$$

$$+(2\gamma-1)T+O(T^{346/1067+\varepsilon})$$

关于四次中值公式估计式的最好结果是英国数学家希思一布朗于1979年得到的，他证明了

对于 $T\geqslant 2$及$\varepsilon>0$，存在常数 a_4，a_3，a_2，a_1，a_0使得

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \right|^4 dt = a_4 T(\log T)^4 + a_3 T(\log T)^3 + a_2 T(\log T)^2 + a_1 T\log T + a_0 T + O(T^{7/8+\varepsilon})$$

其中$a_4 = (2\pi^2)^{-1}$，$a_3 = 2(4\gamma - 1 - \log(2\pi) - 12\zeta'(2)\pi^{-2})\pi^{-2}$，$\gamma = 0.5772157\cdots$ 为欧拉常数．

上述问题中，只要某一个问题得到解决，它就会给解析数论乃至数学带来深刻的变化．解决这些问题的极端困难，无形之中向人类智慧提出了挑战，这将有助于推动人类文化的发展．

参 考 文 献

〔1〕戈丁，数学概观，科学出版社，1984.

〔2〕华罗庚，数论导引，科学出版社，1957.

〔3〕华罗庚，指数和估计，科学出版社，1963.

〔4〕卡拉楚巴，解析数论基础（中译本），科学出版社，1984.

〔5〕克林，元数学导引(上、下册）（中译本），科学出版社，1985.

〔6〕克莱因，古今数学思想(第1～4册)(中译本)，上海科学技术出版社，1980.

〔7〕瑞德，希尔伯特传，上海科学技术出版社，1982.

〔8〕A.Selberg, The zeta and the Riemann Hypothesis Skandinaviske Mathematiker-kongres 10(1946) 187～200.

〔9〕E.C. Ticthmarsh, The Theory of the Riemann Zeta Function, Oxford, 1951.

〔10〕中国科学院自然科学史研究所数学史组，中国科学院数学研究所数学史组，数学史文集，上海科学技术出版社，1981.

外国人名索引

Able（挪威）（1802～1829） 阿贝尔

Apéry（法国） 阿皮列

Artin（奥地利）（1898～1962） 阿丁

Atiyah（英国）（1929～　） 阿提雅

Beltrimi（意大利）（1835～1900） 贝尔切密

Bernstein，F（德国） 伯恩斯坦

Bernstein，S（苏联） 伯恩斯坦

Bieberbach（德国） 比勃巴赫

Bohr，H（丹麦） 玻尔

Bombieri（意大利）（1940～　） 朋比利

Brouwer（　）（1881～1967） 布劳威尔

Cantor（德国）（1845～1918） 康托

Chevallay（法国）（1909～　） 薛伐莱

Cohen（美国）（1934～　） 柯恩

Courant（德国）（1888～1972） 柯朗

Dedekind（德国）（1831～1916） 戴德金

Dehen（德国）（1878～1952） 德恩

Deligne（比利时）（1944～　） 德林

Dirichlet（德国）（1805～1859） 狄利克莱

Euler（德国）（1707～1783） 欧拉

Fermat（法国）（1601～1665） 费尔马

Fields（加拿大）（1863～1932）	菲尔茨
Frege（英国）	弗雷格
Furtwängler（德国）	冯特万格勒
Galilea（意大利）（1564～1642）	伽利略
Gauss（德国）（1777～1855）	高斯
Gödel（奥地利）（1906～1976）	哥德尔
Goldbach（德国）（1690～1764）	哥德巴赫
Gordan（德国）（1837～1912）	果尔丹
Grothendieck（法国）（1928～　）	格罗登迪克
Hadamard（法国）（1865～1963）	阿达玛
Hardy（英国）（1877～1946）	哈代
Hasse（德国）（1898～1979）	汉斯
Hecke（德国）	赫克
Hilbert（德国）（1862～1943）	希尔伯特
Hurwitz（德国）（1859～1919）	赫维茨
Jacobi（德国）（1804～1851）	雅可比
Kant（德国）（1724～1804）	康德
Klein（德国）（1849～1951）	克莱因
Kronecker（德国）（1823～1891）	克罗内克
Landau（德国）（1877～1938）	兰道
Littlewood（英国）	李特伍德
Minkowski（苏联）（1864～1909）	闵可夫斯基
Mordell（英国）	莫奈尔
Morley　（1838～1923）	莫利
Newton（英国）（1643～1727）	牛顿
Noether, E（德国）（1882～1935）	诺特
Perron（德国）（1880～1970）	皮隆

Picard（法国）（1856～1941）　皮卡
Poussin（法国）（1866～1962）　普辛
Ramanujan（印度）（1887～1920）　拉玛努扬
Riemann（德国）（1826～1866）　黎曼
Russel（英国）（1872～1970）　罗素
Runge（德国）（1856～1927）　龙格
Schmidt　施密特
Segre（意大利）　舍格列
Selberg（挪威）（1917～　）　赛尔贝格
Serre（法国）（1926～　）　塞尔
Siegel（德国）（　）　西格尔
Sierpinski（波兰）（1882～1969）　谢尔宾斯基
Sylvester（英国）（1814～1897）　西尔凡斯特
Takagi（日本）（1875～1960）　高木贞治
Tehebycheff（苏联）（1821～1894）　切比晓夫
Vander Waerden（荷兰）（1903～　）范德尔登
Veblen（美国）（1880～1960）　范布仑
Weber（德国）（1842～1913）　韦伯
Weil（法国）（1906～　）　魏依
Weyl（德国）（1885～1955）　外尔
Whitehead（英国）　怀特黑德
Zariski（美国）（1899～　）　查瑞斯基
Zermelo（意大利）（1871～1953）　策梅罗

跋

黎曼猜想提出至今已一个多世纪了，现在仍然是个“迷”.对我们当中的大多数人说来，仅需知道它的意义，并不一定着意于解决它。这正象太空旅行令人神往，但当今空间技术还不能普及到每个公民，需要科学界的勇士们进一步开发新技术一样。数学需要新的知识、新的概念，去开发未知的领域，解决未知的问题。这需要数学工作者不断进取，不断创新。

现代计算技术尽管能使猜想作成千成万次的验证都能灵验，但是它是一个数学问题，无论试多少次总还有无穷多次没有试，只要有一例外，就可推翻猜想。只有逻辑证明，才能弥补猜想和

真理间的鸿沟。

我们大家都喜欢在数学的宙宇中，欣赏数学的神奇。但是我们更应去探索数学宙宇中的未知领域，揭开未知的“面纱”，让人们共同欣赏.20世纪留给我们大家的时间已经不多了，时间迫切期待着数学家能够尽快地解决黎曼猜想，而数学家们也正在不断地努力。我们也愿新世纪给数学带来杰出的大师，早日解决黎曼猜想。让我们以此愿结束本书吧！